

Soyut Matematik

Editör: Erhan PİŞKİN

6. Baskı





Editör: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

SOYUT MATEMATİK

ISBN 978-605-241-576-4

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2023, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayinevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayinevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

1. Baskı: Eylül 2019, Ankara

6. Baskı: Ekim 2023, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türüldür
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Kuyrukcu
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

Bu kitap, özellikle Eğitim Fakültelerinin Matematik Eğitimi programlarında bulunan Soyut Matematik dersi göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır. Bununla birlikte Fen Fakülteleri Matematik programlarında da bulunan Soyut Matematik dersi içinde faydalı bir kaynak olacağı kanaatindeyiz.

Matematiğin hemen hemen bütün dalları için temel teşkil eden soyut matematik dersi ile ilgili yabancı dilde yazılmış çok sayıda kaynak bulunmaktadır. Bu konuda yazılmış bazı Türkçe eserler olmasına rağmen, hala bu alanda boşluk mevcuttur. Bu eserin bu boşluğu bir nebze olsa dolduracağını düşünüyoruz. Soyut matematik dersinin konularını içeren bu çalışmada konu ile ilgili gerekli teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir. Ayrıca çok sayıda çözümlü örnek ve alıştırma bulunmaktadır.

Kitap yedi bölümden oluşmaktadır. Bu bölümler sırasıyla; sembolik mantık, kümeler, bağıntı, fonksiyonlar, sayı sistemleri, Euclid algoritması, sonlu ve sonsuz kümelerdir.

Bu çalışma farklı üniversitelerde görev yapan akademisyenlerin işbirliği ile ortaya çıkmıştır. Kitap ile ilgili gerekli kontroller titizlikle yapılmıştır. Bununla birlikte bölümlerin tüm sorumluluğu ilgili bölüm yazarına aittir.

Bu kitabın Pegem Akademi yayınları tarafından basılmasını sağlayan Servet Sarıkaya beyefendi ve dizgi işlerini titizlikle yapan Selda Tunç hanımefendi başta olmak üzere tüm emeği geçenlere teşekkürlerimizi sunarız. Faydalı olması dileğiyle... Yazarlar adına,

Editör

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

ORCID No: 0000-0001-6587-4479

Bölümler ve Yazarları

Editör: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

1. Bölüm: Sembolik Mantık

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN, *Dicle Üniversitesi*

ORCID No: 0000-0001-6587-4479

2. Bölüm: Kümeler

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN, *Dicle Üniversitesi*

ORCID No: 0000-0001-6587-4479

3. Bölüm: Kartezyen Çarpım ve Bağını

Prof. Dr. Osman Raşit IŞIK, *Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi*

ORCID No: 0000-0003-1401-4553

4. Bölüm: Fonksiyonlar

Dr. Öğr. Üyesi Nebiye KORKMAZ, *Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi*

ORCID No: 0000-0003-2248-4280

5. Bölüm: Sayı Sistemleri

Doç. Dr. Ahmet ÖTELEŞ

ORCID No: 0000-0002-6281-6780

6. Bölüm: Euclid Algoritması

Doç. Dr. Ahmet ÖTELEŞ

ORCID No: 0000-0002-6281-6780

7. Bölüm: Sonlu ve Sonsuz Kümeler

Dr. Öğr. Üyesi Adem EROĞLU, *Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi*

ORCID No: 0000-0001-6609-5901

İÇİNDEKİLER

Ön Söz.....	iii
Bölümler ve Yazarları.....	iv
Notasyonlar	ix

1. BÖLÜM SEMBOİK MANTIK

“ve” Bağlacı.....	5
“veya” Bağlacı.....	5
“ya da” Bağlacı.....	7
“ise” Bağlacı.....	8
“ancak ve ancak” Bağlacı	11
Niceleme Mantığı	15
Evrensel Niceleyici (\forall)	16
Varlıksal Niceleyici (\exists).....	16
Bazı Temel Kavramlar.....	16
Tanım Nedir?	17
Aksiyom Nedir?.....	17
Postulat Nedir?	17
Teorem Nedir?	17
Lemma Nedir?	17
İspat Nedir?	17
İspat Yöntemleri.....	18
Tümdengelim Yöntemi	18
1. Doğrudan İspat	18
2. Dolaylı İspat.....	19
Tümevarım Yöntemi	22
Çözümlü Sorular	29
Sorular.....	33

2. BÖLÜM

KÜMELER

Küme Ailesi	47
Bir Kümenin Parçalanışı (Ayrımı)	50
Bir Kümenin Örtüsü	51
Çözümlü Sorular	51
Alıştırmalar	59

3. BÖLÜM

KARTEZYEN ÇARPIM VE BAĞINTI

Kartezyen Çarpım	63
Bağıntı	68
Bir Bağıntının Tersisi	74
Bağıntıların Bileşkesi	76
Bağıntıların Özellikler	77
Denklik Bağıntıları, Denklik Sınıfları, Oran Kümesi ve Bir Kümenin Parçalanışı	88
Kısmi Sıralı Kümeler	103
En Büyük (Maksimum) ve En Küçük (Minimum) Elemanlar	109
Alt ve Üst Sınırlar	111
Maksimal ve Minimal Elemanlar	115
Tam Sıralama Bağıntısı ve Zincir	120
Sorular	122

4. BÖLÜM

FONKSİYONLAR

Temel Tanımlar	135
Fonksiyonların Bileşkesi	145
Birebir Fonksiyonlar	150
Örten Fonksiyonlar	155
Bir Fonksiyonun Ters Fonksiyonu	160
Çözümlü Örnekler	167
Sorular	179

5. BÖLÜM

SAYI SİSTEMLERİ

Doğal Sayılar	183
Doğal Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi	185
Doğal Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi	190
Doğal Sayılarda Çıkarma İşlemi	193
Doğal Sayılarda Bölme İşlemi	193
Doğal Sayılarda Sıralama	193
Tümevarım ve İyi Sıralama Prensibi	195
Çözümlü Sorular	197
Tam Sayılar	199
Tam Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi	202
Tam Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi	204
Tam Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi	207
Tam Sayılar Kümesinde Sıralama	208
Çözümlü Sorular	210
Rasyonel Sayılar	213
Rasyonel Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi	215
Rasyonel Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi	218
Rasyonel Sayılar Kümesinde Sıralama	222
Çözümlü Sorular	224
Tam Sayılarda Bölme ve Bölünebilme	226
Çözümlü Sorular	233
Sorular	238

6. BÖLÜM

EUCLİD ALGORİTMASI

En Büyük Ortak Bölen (EBOB).....	241
Çözümlü Sorular	250
Euclid Algoritması.....	253
Genişletilmiş Euclid Algoritması	257
Çözümlü Sorular	259
En Küçük Ortak Kat (EKOK)	263
Çözümlü Sorular	268
Asal Sayılar	271
Eratosthenes (Eratostenes) Kalburu	276
Çözümlü Sorular	276
Sorular.....	280

7. BÖLÜM

SONLU VE SONSUZ KÜMELER

Giriş.....	283
Sonlu Kümeler	283
Çözümlü Sorular	287
Sorular.....	289
Sonsuz Kümeler.....	290
Sayılabilme	290
Çözümlü Sorular	296
Sorular.....	298
Kaynaklar.....	299

NOTASYONLAR

N ve \mathbb{N} : Doğal sayılar kümesi

Z ve \mathbb{Z} : Tam sayılar kümesi

Q ve \mathbb{Q} : Rasyonel sayılar kümesi

R ve \mathbb{R} : Reel sayılar kümesi

\wedge : ve

\vee : veya

$\underline{\vee}$: ya da

\Rightarrow ve \rightarrow : ise

\Leftrightarrow ve \leftrightarrow : ancak ve ancak

\forall : her

\exists : bazı

\subset ve \subseteq : alt küme

2^A ve $P(A)$: A kümesinin kuvvet kümesi

A/B ve $A - B$: A fark B kümesi

$A \equiv B$ ve $A \sim B$: Denk kümeler

$A \times B$: A ve B kümelerinin Kartezyen çarpımı

$\llbracket x \rrbracket$: x 'in tam değeri

$[x]$ ve \bar{x} : x 'in denklik sınıfı

m^+ : m doğal sayısının ardışığı

$a \mid b$: a , b 'yi tam böler

1. BÖLÜM

SEMBOLİK MANTIK

Prof. Dr. Erhan PIŞKİN
Dicle Üniversitesi

Mantık; gerçeği ararken yapılan zihin işlemlerinin doğru veya yanlışlığını anlamamıza yarayan bilim dalıdır. Aslında mantık doğru bilgilerden yeni doğru sonuçlar elde etme sanatıdır. İnsanlar ilk çağlardan beri belli doğruları bulmak için çeşitli çıkarımlarda bulunmuşlardır. Bu bölümde esas amaç mantığı sosyolojik, felsefi veya diğer sosyal bilim yöntemlerinden ziyade matematiksel olarak incelemektedir. Bu nedenle elde edilen sonuçlar günlük dildeki kullanımına tam olarak uymayabilir. Örneğin; bir annenin çocuğuna “Odanı toplarsan, sana dondurma alırım” dediğini düşünelim. Burada çocuk odasını toplar ve annesi de ona dondurma alırsa bu istenen bir durumdur. Fakat çocuk odasını toplamazsa annenin ne yapacağı ile ilgili bir fikir vermemektedir. Yani bu bölümde sonuçları matematiksel olarak inceleyeceğiz.

Tanım (Önerme)

Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadelere *önerme* denir.

- Önermeler p, q, r, \dots gibi küçük harfler ile gösterilir.
- Soru, emir, öneri, istek gibi ifadeler önerme değildir.

Örnek:

a. p : Bir gün 24 saattir.

ifadesi kesin bir hüküm bildirdiğinden önermedir. Doğru önermedir.

b. q : $2 < 0$ dır.

ifadesi kesin bir hüküm bildirdiğinden önermedir. Yanlış önermedir.

c. r : Nasılsınız?

ifadesi kesin bir hüküm bildirmediğinden önerme değildir.

d. s : Buraya gel!

ifadesi kesin bir hüküm bildirmediğinden önerme değildir.

e. t : 2'den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamı olarak ifade edilebilir.

ifadesi kesin bir hüküm bildirdiğinden önermedir. Fakat bu önermenin doğru veya yanlış olup olmadığını bilmiyoruz. Bu iddia ünlü Goldbach sanısıdır.

f. u : 20 Nisan 2003 günü sabah kahvaltısında iki bardak çay içtim.

ifadesinin doğruluk veya yanlışlığını kesin olarak bilmesek de, kesin bir hüküm bildirdiğinden önermedir.

Tanım: Bir önerme doğru ise "1" veya "D" ile yanlış ise "0" veya "Y" ile gösterilir. Bir önerme için doğruluk değeri bakımından iki durum vardır.

p		p
1	veya	D
0		Y

Örnek:

a. p : $2 + 2 = 3$ 'tür. Önermesinin doğruluk değeri 0'dır.

b. q : Bir yıl 12 aydır. Önermesinin doğruluk değeri 1'dir.

c. r : π sayısı 3, 14'tür. Önermesinin doğruluk değeri 0'dır.

d. s : $32^2 + 44^2 = 59^2$ 'dir. Önermesinin doğruluk değeri 0'dır.

Not: Doğruluk değeri bakımından n tane önerme için 2^n tane durum vardır.

Örnek: p ve q önermeleri için

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0