

Uygulama Örnekleriyle Cebirsel Düşünme ve Öğretimi

Editör: Gülfem SARP KAYA AKTAŞ

6. Baskı





Editör: Doç. Dr. Gülfem SARP KAYA AKTAŞ

**Uygulama Örnekleriyle
CEBİRSEL DÜŞÜNME VE ÖĞRETİMİ**

ISBN 978-605-241-636-5

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2025, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayinevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayinevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 2000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

1. Baskı: Mart 2019, Ankara

6. Baskı: Mart 2025, Ankara

Yayın-Proje: Selcan Durmuş
Dizgi-Grafik Tasarım: Tuğba Kaplan
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi
Macun Mahallesi 204 Cad. No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: yayinevi@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

Matematik nedir diye sorulduğunda ilk akla gelen tanım; matematik evrensel bir dildir. İşte matematiğe evrensel bir dil olma özelliğini kazandıran alt dalı ise cebirdir denilebilir. Cebir, sayılar ve aralarındaki ilişkileri sembollere dönüştürerek denklemler ve matematiksel ifadelerin oluşturulmasını sağlayan bir alandır. Cebir dil olma özelliğinin yanı sıra bir problem çözme ve aynı zamanda düşünme aracıdır. Düşünme aracı olma özelliğiyle öğrencilerin soyut düşünme ve muhakeme etme becerilerinin gelişmesinde de önemlidir. Öğrenciler cebir sayesinde matematiksel durumları genelleyebilir, modelleyebilir ve analiz edebilir. Dolayısıyla sayısal ilişkileri açıklamada sistematik bir yol izleyerek organize edebilirler. Tüm bu özellikler birleştiğinde öğrencilerin dünyayı tanımalarına ve anlamalarına olanak sağlar. Bu nedenle de öğrencilerin cebiri öğrenmesinin gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

Cebirde kullanılan semboller ve kavramlar arası ilişkiler öğrenciler tarafından doğru olarak anlaşıldığında ancak cebirsel düşünme biçimleri gelişebilecektir. Alanyazında yer alan birçok çalışmada öğrencilerin cebir öğrenmede ve cebirsel düşünmede zorluklar yaşadığı görülmektedir.

Biz bu kitapla cebirin ve cebirsel düşünmenin gizemli dünyasına bir kapı açmak istedik. Cebirsel düşünmenin tarih boyunca gelişiminden başlayıp matematik yapma boyutunda diyebileceğimiz fonksiyonel düşünme ile sonlandırdık.

Kitabın birinci bölümünde, cebir alanındaki temel kavramlara yönelik olarak tarihsel gelişimi yer almaktadır ve tarihin cebir öğretiminde kullanım şekillerine örnekler verilmiştir. İkinci bölümde ise cebirsel düşünmenin ne olduğu ve bu düşünme şeklinin matematik öğrenimindeki öneminden bahsedilmiştir. Üçüncü bölüm, cebirin öğretiminde kullanılacak olan alternatif öğrenme ve öğretim yaklaşımlarına, stratejilerine, yöntem-tekniğine ve örnek ders planlarına ayrılmıştır. Öğrenmede bilişsel özellikler önemli olduğu kadar duyuşsal özelliklerde önemlidir. Kitabımızın dördüncü bölümünde cebir öğreniminde duyuşsal özelliklerin neler olduğu üzerinde durulmuştur.

Cebirin temellerini aritmetikten alması dolayısıyla beşinci bölümde aritmetik ve cebir arasındaki ilişki açıklanmaya çalışılmıştır. Öğrenciler aritmetik bilgileri ile cebir öğrenme alanındaki yeni bilgileri ilişkilendiremedikleri zaman anlamlı öğrenme gerçekleşemeyebilmektedir. Bu nedenle cebirsel düşünmede aritmetiğin temellerinin sağlam olması önemlidir. Altıncı bölüme geldiğimizde artık cebirin temel taşı olan değişken ve değişkenlerden oluşan cebirsel ifade kavramlarının cebirsel düşünme ve öğretiminde ki yeri, öğrencilere kavramsal olarak anlamlandırılma biçimleri, öğrencilerin sıklıkla yaptıkları hatalar üzerinde durulmaktadır.

Yedinci bölümde ise cebirin sembolik dil olmasına katkı sağlayan ve denklemler içinde önemli bir kavram olan eşitlik işareti ve anlamı, sekizinci bölümde özdeşlik kavramı, bu kavramın öğretimi, öğrencilerin yaşadıkları zorlukları, dokuzuncu bölümde ise cebir öğrenme alanı içerisinde okul matematiğinin en önemli konularından olan denklem kavramı ve öğretimi irdelenmiştir.

Onuncu bölüm yine cebirin önemli ve öğrencilerin sıklıkla hata yaptıkları bir konusu olan eşitsizliklere ayrılmıştır. Eşitsizlik kavramı ve öğretimi üzerine açıklamalar sunulmuştur. Onbirinci bölüm cebirsel düşünmenin temelini oluşturan ve en son basamak olan fonksiyonel düşünmeye geçişi kolaylaştıran örüntüler kavramı ve akabinde onikinci bölüm yine fonksiyonel düşünmenin basamaklarından olan doğrusal denklemler ve ilişkiler kavramları ile öğretimlerine yönelik olarak yazılmıştır. En son bölüm olan onüçüncü bölümde ise cebirsel düşünmenin artık son aşaması da diyebileceğimiz fonksiyonel düşünme kavramı ve düşünme sürecine katkıda bulunan öğrenme ortamları yer almıştır.

Bu kitap cebirsel düşünme ve öğretimine yönelik olarak hazırlanmış bir kitap olması nedeniyle Matematik öğretmeni adaylarına ve öğretmenlerine ayrıca matematik eğitiminde cebir öğrenme alanı ile ilgilenen bu konuda araştırma yapmak isteyen kişilere yardımcı olabilecek bir kitaptır. Kitabın oluşmasında büyük emek sarfeden değerli akademisyen meslektaşlarıma ve bize akademik kitap yazımlarımızda destek veren Pegem Akademi'ye sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Kitabımızda yer alan bölümlerin etkin bir şekilde cebirin kavramlarının anlaşılmasında, öğrenilmesinde ve öğretilmesinde katkı sağlamasını dileriz.

Doç. Dr. Gülfem SARP KAYA AKTAŞ

BÖLÜMLER VE YAZARLARI

Editör: Doç. Dr. Gülfem SARP KAYA AKTAŞ

1. Bölüm: Cebirin Tarihi

Doç. Dr. Gülfem SARP KAYA AKTAŞ - Çukurova Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-1518-2412

2. Bölüm: Cebirsel Düşünme ve Cebirsel Düşünmenin Matematik Öğretimindeki Yeri

Prof. Dr. Melihan ÜNLÜ - Aksaray Üniversitesi
ORCID No: 0000-003-3337-8758

3. Bölüm: Cebir Öğretiminde Kullanılan Öğrenme ve Öğretim Yaklaşımları

Dr. Öğr. Üyesi Gözdegül ARIK KARAMIK - Akdeniz Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-9478-6264

4. Bölüm: Cebir Öğretiminde Duyuşsal Özellikler

Doç. Dr. Nuri Can AKSOY - Hasan Kalyoncu Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-6087-8884

5. Bölüm: Aritmetik - Cebir İlişkisi

Prof. Dr. Abdullah Çağrı BİBER - Kastamonu Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-7635-3951

6. Bölüm: Cebirsel İfade ve Değişken Kavramının Öğretimi

Doç. Dr. Nejla GÜREFE - Mersin Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-0705-0890

7. Bölüm: Eşitlik Kavramı ve Öğretimi

Doç. Dr. Dilşad GÜVEN AKDENİZ - Bayburt Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-7387-5770

8. Bölüm: Özdeşlik Kavramı ve Öğretimi

Arş. Gör. Dr. Hilmi KARACA - Aksaray Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-5958-2522

9. Bölüm: Denklem Kavramı ve Öğretimi

Prof. Dr. Erhan ERTEKİN - Necmettin Erbakan Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-6466-8996

10. Bölüm: Eşitsizlik Kavramı ve Öğretimi

Doç. Dr. Derya Özlem YAZLIK - Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-2830-5215

11. Bölüm: Örüntüler

Doç. Dr. Feride ÖZYILDIRIM GÜMÜŞ - Aksaray Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-1149-0039

12. Bölüm: Doğrusal İlişkiler ve Doğrusal Denklemlerin Öğretimi

Doç. Dr. Ali ÖZKAYA - Akdeniz Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-6401-1839

13. Bölüm: Fonksiyonel Düşünme

Prof. Dr. Abdulkadir TUNA - Kastamonu Üniversitesi
ORCID No: 0000-0003-3553-7513
Doç. Dr. Feyza ALIUSTAOĞLU - Kastamonu Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-9262-5216

İÇİNDEKİLER

Ön Söz.....	iii
Bölümler ve Yazarları.....	v

1. BÖLÜM CEBİRİN TARİHİ

Matematik Tarihinin Öğretimde Kullanılmasının Önemi	1
Aritmetik - Cebir Arasındaki İlişkiye Yönelik Tarihsel Gelişim	4
Cebirsel İfadeler ve Değişken'in Tarihsel Gelişimi	5
Eşitlik İşareti.....	7
Özdeşliklerin Tarihsel Süreci	7
Denklemlerin Tarihsel Süreci	9
Cebir Tarihinde Eşitsizlik	15
Örüntüler ve Sayı Dizilerinin Tarihi.....	15
Fonksiyonel Düşünmenin Gelişim Serüveni.....	18
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	19
Kaynaklar.....	22

2. BÖLÜM CEBİRSEL DÜŞÜNME VE CEBİRSEL DÜŞÜNMENİN MATEMATİK ÖĞRETİMİNDEKİ YERİ

Cebirsel Düşünme.....	24
Cebirsel Düşünmenin Boyutları.....	26
Cebirsel Düşünmenin Gelişimi	28
Zihnin Cebirsel Alışkanlıklarını Oluşturmak	28
Genelleme.....	30
Çoklu Temsillerden Yararlanma.....	33
Cebirsel Düşünmenin Geliştirilmesinde Kullanılacak Araçlar	34
Cebirsel Düşünmenin Matematik Öğretimindeki Önemi.....	37
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	39
Kaynaklar.....	40

3. BÖLÜM

CEBİR ÖĞRETİMİNDE KULLANILAN ÖĞRENME VE ÖĞRETİM YAKLAŞIMLARI

Yapılandırmacı Yaklaşım	45
Yapılandırmacı Yaklaşımın 4 Aşamalı Modeli	49
Yapılandırmacı Yaklaşımın 5E Modeli	50
Yapılandırmacı Yaklaşımın 7E Modeli	51
Sosyokültürel Yaklaşım	53
İşbirliğine Dayalı Öğrenme Yöntemi	55
Yaratıcı Drama Yöntemi	59
Oyunla Öğretim Yöntemi	60
Bölüm Değerlendirme Soruları	68
Kaynaklar.....	69

4. BÖLÜM

CEBİR ÖĞRETİMİNDE DUYUŞSAL ÖZELLİKLER

Cebir Öğretiminde Duyuşsal Özellikler.....	76
Cebir ve Beceri.....	76
Öğretim Programında Cebir.....	78
Cebir Öğreniminde Karşılaşılan Zorluklar.....	80
Cebir Öğreniminde Karşılaşılan Zorluk Nedenleri.....	81
Cebir ve Tutum	83
Cebir Öğreniminde Öneriler	84
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	86
Kaynaklar.....	87

5. BÖLÜM

ARİTMETİK - CEBİR İLİŞKİSİ

Aritmetik-Cebir İlişkisi	93
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	99
Kaynaklar.....	100

6. BÖLÜM

CEBİRSEL İFADE VE DEĞİŞKEN KAVRAMININ ÖĞRETİMİ

Cebirsel İfade	103
Değişken Kavramın Tanımı ve Önemi	104
Değişkenin Bilinmeyen ve Değişen Nicelik Anlamları.....	106
Değişken Kavramının Cebir Öğrenme Alanı ve Diğer Öğrenme Alanları ile İlişkisi	108
Cebirsel İfadeler ve Değişken Kavramının Öğretim Programındaki Yeri	109
Cebirsel İfade ve Değişken Kavramının Öğretiminde Karşılaşılan Zorluklar ile Öğrenci Hataları ve Kavram Yanılgıları	111
Değişken Kavramının Öğretiminde Teknolojinin Yeri	115
Cebirsel İfade ve Değişken Kavramının Öğretimi	117
Değişkenin Yer Tutucu Özelliğinden Harf Temsiline.....	118
Bilinmeyen Anlamındaki Değişkenin Öğretimi	119
Değişen Nicelik Anlamındaki Değişkenin Öğretimi	120
Değişken Kavramının Günlük Hayattaki Yeri ve Diğer Derslerle İlişkisi.....	122
Değişken Kavramına Yönelik Ders İçeriği Düzenleme	123
Dersin Önce Evresi	123
Ders Sırası Evresi.....	124
Ders Sonrası Evresi	124
Bölüm Değerlendirme Soruları ve Çözümleri	124
Kaynaklar.....	127

7. BÖLÜM

EŞİTLİK KAVRAMI VE ÖĞRETİMİ

Eşitlik Kavramının Tanımı ve Önemi.....	131
Eşitlik Kavramının Cebir Öğrenme Alanı ve Diğer Öğrenme Alanları ile İlişkisi ...	134
Eşitliğin Cebir Öğrenme Alanı ile Olan İlişkisi	134
Eşitliğin Diğer Öğrenme Alanları ile İlişkisi	136
Eşitlik Kavramının Öğretim Programındaki Yeri	136
Eşitlik Kavramının Öğretiminde Karşılaşılan Öğrenci Hata ve Yanılgıları.....	138
Eşitlik Kavramının Öğretiminde Teknolojinin Yeri	142
Eşitlik Kavramının Öğretimi	143
Eşitlik Kavramının Günlük Hayattaki Yeri ve Diğer Derslerle İlişkisi	148
Eşitlik Kavramına Yönelik Ders İçeriği Düzenleme ve Etkinlik Uygulamaları.....	149

Etkinlik 1	149
Etkinlik 2	151
Öğrenme Ortamlarına Uygun Tartışma Ortamları Oluşturma	153
Bölüm Değerlendirme Soruları	155
Kaynaklar.....	157

8. BÖLÜM

ÖZDEŞLİK KAVRAMI VE ÖĞRETİMİ

Özdeşlik Kavramı ve Tanımı.....	159
Özdeşlik Kavramının Bileşenleri.....	160
Özdeşlik ve Eşitlik	160
Özdeşlik ve Değişken.....	160
Özdeşlik Sonsuz İlişkisi	161
Özdeşlik Denklem İlişkisi	161
Özdeşlik Kavramının Cebir Öğrenme Alanı ve Diğer Öğrenme Alanları ile İlişkisi	162
Özdeşlik Kavramının Öğretim Programındaki Yeri.....	163
Özdeşlik Kavramının Öğretimi ve Ders İçeriği Oluşturma.....	164
Ders Planı 1	165
Ders Planı 2	172
Temel Özdeşlikler	181
Özdeşlik Kavramının Öğretiminde Teknolojinin Yeri	182
Özdeşlik Kavramının Öğretiminde Karşılaşılan Öğrenci Hataları ve Kavram Yanılgıları.....	185
Özdeşlik Kavramı ile İlgili Kavram Yanılgıları.....	185
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 / (a - b)^2 = a^2 - b^2$ Kavram Yanılgıları.....	186
$7x - x = ?$	187
Bölüm Değerlendirme Soruları	187
Kaynaklar.....	189

9. BÖLÜM

DENKLEM KAVRAMI VE ÖĞRETİMİ

Denklem Kavramı Tanımı ve İlişkili Olduğu Kavramlar	191
Denklem Kavramı ve Tanımı.....	191
Denklem Kavramı ve İlişkili Olduğu Kavramlar	193

Denklem Kavramının Öğretim Programındaki Yeri.....	196
Denklem Öğretiminde Karşılaşılan Zorluklar ve Kavram Yanılgıları.....	196
Diğer Ters İşlem Hatası	197
Yeniden Dağıtım ve Toplananın Yer Değiştirmesi Hatası.....	198
Ters İşlemlerin Sınırlı Uygulanması	198
Tanıdık Olmayanın Görmezlikten Gelinmesi	198
Değişkenin Değeri Aynı Olduğu Düşüncesi ile Diğerlerini Görmezden Gelme Hatası	198
Eksi İşaretinin Negatif Sayılarla Özdeşleştirilmesi	199
Denklem Çözme ve Öğretimi	199
Denklem Çözmenin Terazi Modeli ile Öğretimi	201
Cebir Karoları Kullanarak Denklem Öğretimi	206
Negatif Değer İçeren Denklemler İçin Alternatif Bir Model: Dört Kefeli Terazi Modeli	210
Denklem Çözmenin Öğretiminde Grafik Kullanımı	212
Denklem Kavramı ve Çözümünün Öğretiminde Teknoloji.....	214
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	216
Kaynaklar.....	218

10. BÖLÜM

EŞİTSİZLİK KAVRAMI VE ÖĞRETİMİ

Eşitsizlik Kavramının Tanımı ve Önemi.....	221
Eşitsizlik Kavramının Ortaokul Matematik Programındaki Yeri	223
Eşitsizlik Kavramının Öğretiminde Karşılaşılan Öğrenci Hataları ve Kavram Yanılgıları.....	226
Eşitsizlik Kavramının Öğretiminde Teknolojinin Yeri	230
Eşitsizlik Kavramının Öğretiminde Materyal Tasarımı ve Kullanımı.....	235
Eşitsizlik Kavramının Günlük Hayattaki Yeri ve Diğer Derslerle İlişkisi	239
Ders içeriğini Düzenleme ve Etkinlik Uygulamaları.....	240
Etkinlik 1.	240
Etkinlik 2.	241
Etkinlik 3.	243
Etkinlik 4.	244
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	245
Kaynaklar.....	246

11. BÖLÜM ÖRÜNTÜLER

Örüntü Kavramı ve Çeşitleri.....	251
Tekrarlanan/ Tekrarlayan Örüntü.....	252
Genişleyen/Değişen Örüntü.....	253
Örüntülerde İlişkiler ve Genellemeler; Çözüm Stratejileri.....	254
Örüntülerin Cebir Öğrenme Alanı ile İlişkisi ve Öğretim Programındaki Yeri.....	255
Örüntü Kavramının Öğretimi ve Ders İçeriği Oluşturma.....	259
Örüntü Kavramının Öğretiminde Teknolojinin Yeri.....	261
Örüntü Kavramının Öğretiminde Karşılaşılan Öğrenci Hataları ve Kavram Yanılgıları.....	264
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	265
Kaynaklar.....	268

12. BÖLÜM

DOĞRUSAL İLİŞKİLER VE DOĞRUSAL DENKLEMLERİN ÖĞRETİMİ

Doğrusal İlişki Kavramı ve Doğrusal Denklemlerin Cebir Öğrenme Alanı ve Diğer Öğrenme Alanları ile İlişkisi.....	271
Doğrusal İlişki Kavramı ve Doğrusal Denklemlerin Öğretim Programındaki Yeri.....	272
Doğrusal İlişki Kavramı ve Öğretimi	273
Kelimelerden Sembollere Etkinliği	273
Doğrusal İlişki ve Doğru Orantı.....	274
Şekillerden Çevre Uzunluğuna Etkinliği	276
Kartlar ve Noktaları Etkinliği	277
Grafik Çizme Etkinliği.....	278
Simit Üretim Etkinliği	278
Bahçe Etkinliği.....	279
Taksimetre Etkinliği.....	281
Doğrusal Denklemlerin Öğretimi.....	282
Elma Bahçesindeki Elmalar	283
Doğrusal Denklemlerin Öğretiminde Alternatif Yaklaşımlar.....	283
Doğrusal İlişki Kavramı ve Doğrusal Denklemlerin Öğretiminde Karşılaşılan Öğrenci Hataları ve Kavram Yanılgıları	286
Doğrusal İlişki Kavramı ve Doğrusal Denklemlerin Öğretiminde Teknolojinin Yeri	287
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	290
Kaynaklar.....	291

13. BÖLÜM FONKSİYONEL DÜŞÜNME

Fonksiyonel Düşünmenin Tanımı ve Önemi	293
Fonksiyonel Düşünmenin Öğretim Programındaki Yeri.....	294
Fonksiyonel Düşünmenin Öğretimi.....	296
Küçük Yaşlarda Fonksiyonel Düşünmenin Öğretimi	296
Ortaokul Yıllarında Fonksiyonel Düşünmenin Öğretimi	296
İlerleyen Dönemlerde Fonksiyonel Düşünmenin Öğretimi	302
Fonksiyonel Düşünmenin Öğretiminde Teknolojinin Yeri.....	303
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	304
Kaynaklar.....	306
Yazarlar Hakkında.....	307

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Harezmi (780-847)	4
Şekil 1.2. Diophantus (200-284)	4
Şekil 1.3. Diophantus Kısaltmaları ve Modern Gösterimine Örnekler	6
Şekil 1.4. Viète (1540-1603)	6
Şekil 1.5. Euclid	7
Şekil 1.6. Rhind	9
Şekil 1.7. Diophantus'un Eseri.....	11
Şekil 1.8. $x^2 + 10x - 39$ Denkleminin Harezmi Tarafından Sunulan Geometrik Gösterimi	12
Şekil 1.9. Ömer Hayyam (1048-1131)	13
Şekil 1.10. Fibonacci (1170-1240)	13
Şekil 1.11. Descartes (1596-1650)	15
Şekil 1.12. 1'den 6'ya (n) Kadar Olan Sayıların Modellenmesi.....	17
Şekil 1.13. Kareye Tamamlamak İçin Kullanılan Model	17
Şekil 1.14. Elde Edilen Kare Modeli.....	18
Şekil 2.1. Cebirsel Düşünmenin Kavramsal Yapısı	25
Şekil 2.2. Cebirsel Düşünmenin Boyutları.....	27
Şekil 2.3. Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları.....	29
Şekil 2.4. Modelleme Örnekleri.....	31
Şekil 2.5. Küçük Dairelerle Yapılan Örüntüler	31
Şekil 2.6. Karelerden Oluşan Şekil Örüntüsü	33
Şekil 2.7. Üçgenlerden Oluşan Örüntünün Temsili Gösterimi	33
Şekil 2.8. Tablo Gösterimleri.....	34
Şekil 2.9. Grafikselsel Gösterimler.....	34
Şekil 2.10. Cebirsel Düşünmenin Gelişiminde Kullanılacak Somut Model Örnekleri.....	35
Şekil 2.11. NLVM'de Sunulan Cebirsel Düşünmeyi Geliştirici Örnekler	36
Şekil 2.12. Geogebra'da Cebirsel Bir İlişkinin Çoklu Temsili.....	37
Şekil 6.1. Etkinlik 6.1. Değişkenin Öğretiminde Kullanılan PanBalance-Shapes Yazılımının Ekran Görüntüsü.....	116
Şekil 6.2. Etkinlik 6.2. Değişkenin Yer Tutucu Özelliği	118
Şekil 6.3. Etkinlik 6.3. Değişkenin Değişen Nicelik Anlamıyla İlgili Problem.....	121
Şekil 7.1. $0.5x + 30 = 0.75x + 26$ 'nın Sayısal, Grafikselsel ve Cebirsel Çözümlerini Gösteren Ekran Görüntüsü	142
Şekil 7.2. Eşitlik İçin Terazi Modeli.....	147

Şekil 7.3. Eşitlik İçin Çubuk Modeli.....	148
Şekil 7.4 Bölme ve Tekrar Bir Araya Getirme İçin Çubuk Modeli.....	150
Şekil 7.5 Bölme Sonucu Elde Edilen Her Bir Parçanın Birbirine Eşit Olması	151
Şekil 7.6. $3+4=7$ Eşitliği İçin Terazi ve Çubuk Modeli.....	151
Şekil 7.7. $5 + 2 = 4 + 3$ Eşitliği İçin Terazi ve Çubuk	152
Şekil 8.1. Cebirsel İfadelerle İşlemlerin Modellenmesi Örnek 1	167
Şekil 8.2. Cebirsel İfadelerle İşlemlerin Modellenmesi Örnek 2	167
Şekil 8.3. Sayıların Sanal Manipulatif İle Modellenmesi	167
Şekil 8.4. $3(x+4)$ Cebirsel İfadenin Modellenmesi	167
Şekil 8.5. Cebirsel İfadelerin Çarpma İşleminde Model Kullanılması	170
Şekil 8.6. Tanılayıcı Dallanmış Ağaç Örneği.....	171
Şekil 8.7. Sanal Manipulatifle Oluşturulmuş Etkinlik Örneği	173
Şekil 8.8. $(a + b)^2$ 'nin Modellenmesi.....	174
Şekil 8.9. $(x + 3)^2$ ve $(5 + 3)^2$ 'nin Modellenmesi.....	174
Şekil 8.10. $(a-b)^2$ Özdeşliğinin Modellenmesi.....	175
Şekil 8.11. Özdeşliklere Günlük Hayattan Problem Örneği	176
Şekil 8.12. Cebir Karoları ve Özdeşlikleri Eşleme Etkinliği.....	178
Şekil 8.13 Cebir Karoları.....	183
Şekil 8.14. Özdeşliklerin Öğretiminde Kullanılabilecek Sanal Manipulatifler	184
Şekil 8.15. Geogebra ile Özdeşlik Öğretimi	185
Şekil 8.16 $(a + b)^2$ ve $a^2 + b^2$ İfadelerinin Modellemesi	186
Şekil 8.17. $(a - b)^2$ ve $a^2 - b^2$ İfadelerinin Modellemesi	186
Şekil 9.1. Eşitlik Kavramı İçin Terazi Modeli.....	201
Şekil 9.2. Terazi Modeli, Sayma Pulları Denge Modeli ve İşlemsel Karşılığı ile Denklem Çözümü	204
Şekil 9.3. Sayma Pulları Denge Modeli ve İşlemsel Karşılığı ile Denklem Çözümü.....	205
Şekil 9.4 Cebir Karoları ve İşlemsel Karşılığı ile $x + a = b$ Tipi Denklem Çözümü..	208
Şekil 9.5 Cebir Karoları ve İşlemsel Karşılığı ile $ax = b$ Tipi Denklem Çözümü	209
Şekil 9.6. Dört Kefeli Terazi Modeli ve İşlemsel Karşılığı ile $ax + b = cx + d$ Tipi Denklem Çözümü	211
Şekil 9.7. $2x + 3 = 4$ Denkleminin Grafikle Çözümü.	212
Şekil 9.8 $ x-3 =4$ Denkleminin Grafikle Çözümü	212
Şekil 9.9. Lineer Denklem Sistemlerinin R^2 'de Grafikle Çözümlerine İlişkin Olası Durumlar	213
Şekil 9.10. Lineer Denklem Sistemlerinin R^3 'te Grafikle Çözümlerine İlişkin Olası Durumlar	214

Şekil 9.11 NLVM'de Denklemin Terazi Modeli	215
Şekil 9.12. Photomath	216
Şekil 9.13. Mathway.....	216
Şekil 9.14. GeoGebra.....	216
Şekil 10.1. NVLM Ara Yüzü.....	232
Şekil 10.2. SAMAP Terazi Modeli.....	233
Şekil 10.3. EBA'da Yer Alan "Eşitlik ve Eşitsizlik Arasındaki İlişki" Adlı Videoya Ait Ekran Görüntüleri	233
Şekil 10.4. GeoGebra Programı ile Hazırlanmış "Eşitlik ve Eşitsizlik Arasındaki İlişki" Adlı Etkinlik.....	234
Şekil 10.5. GeoGebra Programı ile Hazırlanmış "İki Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemi" Adlı Etkinlik.....	234
Şekil 10.6. 2005 Yılı Matematik Dersi Öğretim Programında Yer Alan Etkinlik Örneği	236
Şekil 10.7. Terazi ve Tahterevallı Öğretim Materyali Örnekleri.....	237
Şekil 10.8. Dört Kefeli Cebir Terazisi	238
Şekil 10.9. Dört Kefeli Cebir Terazisinde " $3 > 2$ " Eşitsizliğinin Gösterimi.....	238
Şekil 10.10. Dört Kefeli Cebir Terazisinde " $(-2) < 0$ " Eşitsizliğinin Gösterimi	239
Şekil 11.1. Tekrarlayan Şekil Örüntüsü	252
Şekil 11.2. Döngüsel Örüntüye Örnek.....	252
Şekil 11.3. Sek Sek Örüntü Modeli.....	253
Şekil 11.4. Sabit Değişen Şekil Örüntüsü Örneği.....	253
Şekil 11.5. Artarak Değişen Şekil Örüntüsüne Örnek.....	254
Şekil 11.6. Cebirsel Genelleme Yapısı	255
Şekil 11.7. Örüntüler Konusuna İlişkin Örnek Oyun Görseli.....	263
Şekil 11.8. Örüntüler Konusuna İlişkin Örnek Oyun Görseli.....	263
Şekil 11.9. Örüntüler Konusuna İlişkin Örnek Oyun Görseli.....	263
Şekil 12.1. Yumurtalarla Oluşturulan Kutuların Grafiği.....	274
Şekil 12.2. Doğru Orantı Grafiğine Bir Örnek	275
Şekil 12.3. Doğrusal İlişkiye Bir Örnek	275
Şekil 12.4. Genişleyen Örüntüye Bir Örnek.....	276
Şekil 12.5. Örüntünün Grafiği.....	276
Şekil 12.6. Kartlar ve Kartların Üstünde Görünen Noktalar	277
Şekil 12.7. $y = x + 3$ Doğrusunun Grafiği.....	278
Şekil 12.8. Simit Probleminin Çözümüne Öğrenci Cevaplarından Örnek.....	279
Şekil 12.9. Fide Boyunu Hesaplama Örneği	280

Şekil 12.10. Grafik Örneği.....	281
Şekil 12.11. Grafik Örneği.....	282
Şekil 12.12. Problemin Çözüm Örneği.....	283
Şekil 12.13. Denklemin Sayı Doğrusunda Gösterimi.....	284
Şekil 12.14. $3x + 5 = 11$ Eşitliğinin Sayı Doğrusunda Gösterimi.....	284
Şekil 12.15 İki Tarafında Bilinmeyen Olan Doğrusal Denklem Çözümünde Sayı Doğrusunu Kullanma.....	284
Şekil 12.16. $2x - 4 = 5$ in Sayı Doğrusunda Gösterimi.....	285
Şekil 12.17. $2x - 4 = 5$ in Sayı Doğrusunda İkinci Gösterimi.....	285
Şekil 12.18. $2x - 4 = 5$ in Sayı Doğrusunda Üçüncü Gösterimi.....	285
Şekil 12.19. Denklemin Her İki Tarafında Bilinmeyen ve Negatif Sayı Olan Bir Denklemin Gösterimi.....	286
Şekil 12.20. $17 - 3x = x + 1$ in Gösterimi.....	286
Şekil 12.21. $4x - 13 = 2x - 3$ in Gösterimi.....	286
Şekil 12.22. Doğrusal Denklem Grafiklerinde Basit Öğrenci Hataları.....	287
Şekil 12.23. $x = c$ Doğrularının Geogebra ile Gösterimleri.....	288
Şekil 12.24. $ax + c = 0$ Doğrularının Geogebra ile Gösterimleri.....	289
Şekil 12.25. $y = ax$ Doğrularının Geogebra ile Gösterimleri.....	289
Şekil 12.26. $ax + by + c = 0$ Doğrusunun Geogebra ile Gösterimi.....	289
Şekil 13.1. Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programında Fonksiyonel İlişkiye Yönelik 5. Sınıf Düzeyinde Yer Alan Bir Örnek.....	294
Şekil 13.2 Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programında Fonksiyonel İlişkiye Yönelik 7. Sınıf Düzeyinde Yer Alan Bir Örnek.....	295
Şekil 13.3 Örüntü Genellemesine Dayalı Bir Soru Örneği.....	297
Şekil 13.4 Doğrusal Denklemler Konusunun Öğretiminde Çoklu Temsil Kullanımına Dayalı Bir Örnek.....	300
Şekil 13.5. Örüntünün Kuralının Bulunmasına Dayalı Bir Örüntü Örneği.....	301
Şekil 13.6. Fiziksel Örüntüyü Kullanarak Örüntünün Kuralının Bulunması.....	301
Şekil 13.7. Kuadratik Örüntülere Bir Örnek.....	302
Şekil 13.8. Geogebra Programı Kullanılarak Fonksiyon Grafiklerinin Çizilmesine Dayalı Bir Örnek.....	304

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 2.1. Probleme Ait Çözüm Tablosu.....	32
Tablo 6.1. Tablo, Beklenen Satışlara Bağlı Olarak Elde Edilen Gelir-Giderlere Göre Kar-Zarar Durumu Belirlenerek Hazırlanabilir.	126
Tablo 7.1. Eşit İşaretine Dair Öğrenci Yorumlamaları	133
Tablo 7.2. Öğrencilerin Eşitlik Kavramına Dair Hata, Yanılgı Türleri ve Göstergeleri	140
Tablo 8.1. MEB 2009, 2013, 2018 Matematik Programında Özdeşlik Kazanımları.....	163
Tablo 8.2 Özdeşlik Modellemesi ile Cebirsel İfadesinin Yazımı.....	168
Tablo 8.3 Özdeşlik Oluşturma Etkinliği.....	169
Tablo 8.4. Özdeşlik Denklem Arasındaki İlişki Etkinliği.....	169
Tablo 8.5. Öz Değerlendirme Envanteri.....	170
Tablo 8.6. Kağıt Katlama Etkinliği.....	172
Tablo 8.7. Özdeşliklerde Terimlerin Katsayıları Arasındaki İlişkiyi Görmeye Yardımcı Örnekler.....	177
Tablo 8.8. Üst Düzey Cebirsel Düşünme Etkinlikleri.....	177
Tablo 8.9. Özdeşlik Olacak Şekilde Kutuyu Bulma Etkinliği.....	178
Tablo 8.10. Kare ve Dikdörtgen Model Kullanımı Ayrımına Yönelik Etkinlik	179
Tablo 8.11. Özdeğerlendirme Envanteri.....	180
Tablo 8.12. ifadelerin Karesi Özdeşlikleri İlgili Değerlendirme Soruları.....	180
Tablo 8.13. Temel Özdeşlikler.....	181
Tablo 9.1. 7. ve 8. Sınıf Düzeylerinde Denklemler Konusuna İlişkin Kazanımlar ...	196
Tablo 9.2. Denklem Çözümünde İnfomal Stratejiler	202
Tablo 9.3. Terazi Modeli ve İşlemsel Karşılığı ile Denklem Çözümü	202
Tablo 9.4. Denklemnin İnfomal Stratejiler ile Çözümü.	207
Tablo 9.5. Bağlamla İlişkilendirerek Denklem Çözümü	207
Tablo 11.1. Örüntülere İlişkin Kazanımların Öğretim Programlarındaki Yeri.....	257
Tablo 11.2. Örüntünün Öğretilmesine Yönelik Örnek Etkinlik.....	259
Tablo 12.1 Yumurta Adedi ile Oluşturulan Kutu Adedi.....	274
Tablo 12.3. $y = x + 3$ ün Değer Tablosu	278
Tablo 12.4. Yol ve Ücret Arasındaki İlişki Tablosu.....	282
Tablo 12.5. Sayı Doğrusundaki Çözümün Tablo Gösterimi.....	285
Tablo 13.1. Örüntüde Kullanılan Şekillerin Sayısının Tablosu.....	302

1. BÖLÜM

CEBİRİN TARİHİ

Doç. Dr. Gülferm SARP KAYA AKTAŞ - Çukurova Üniversitesi

1960'lerden ve 1970'lerden itibaren, matematik tarihinin matematik dersinde bir yeri olması gerektiği fikri ortaya atılmıştır. Eğitimciler, öğretim için matematik tarihinin değerini düşünerek son yıllarda matematiğin öğrenilmesindeki rolüne yönelik çalışmalara yönelmişlerdir. Matematiğin doğası nedir? Nasıl oluşmuştur? Kullandığımız matematiksel bilgiler önceleri de aynı şekilde mi okullarda yer almaktaydı? Matematik tarihi ile matematiği öğretme etkinliklerimiz bütünleştirilebilir mi? Matematik tarihi öğrenme ve öğretme etkinliklerinde kullanıldığında öğretmen ve öğrencilere sağlayacağı faydalar nelerdir? gibi sorular matematik tarihinin ve öğretimde kullanılmasının öneminin açıklanmasını gerektirmektedir.

1.1. Matematik Tarihinin Öğretimde Kullanılmasının Önemi

Eğitim sistemi içerisinde öğretmen ve öğrenciler matematiğin zengin bir tarihe sahip olduğunu göremeyebilirler. Bazen de matematiğin sürekli gelişim gösterdiğini, insan emeğinin ürünü olduğunu farklı kültürlerin farklı matematik yaptıklarını idrak etmede başarısız olmaktadır (Tzanakis ve Arcavi, 2000). Matematiksel bilginin doğası ile ilgili olarak matematiğin öğrenciler tarafından kesin, düzenli, teorem, ispat ve kurallardan oluşan mükemmel bir bilgi topluluğu şeklinde algılanması öğrenme biçimlerinde ve başarılarında olumsuz etkiler oluşturmaktadır (Cifarelli ve Goodson-Espy, 2001). Matematiksel bilgilerin doğası ile ilgili doğru algıların oluşmasında matematik tarihi ile matematik derslerinin zenginleştirilmesi önemlidir (Tzanakis ve Arcavi, 2000).

Matematik tarihinin öğretim ortamlarında kullanılmasının önemi maddeler halinde şu şekilde belirtilebilir;

- Matematiğin insan aktivitesi ve ürünü olduğunu ortaya koymada yardımcı olması (Fried, 2001; Tzanakis ve Arcavi, 2000),

- Matematiğin gelişimini sürdüren canlı bir bilim olduğunun ortaya konulması (Özdemir ve Göktepe Yıldız, 2015),
- Matematiksel kavramların, problemlerin ve çözümlerinin temelini anlaşılması (Fried, 2001),
- Matematiğin ve matematiksel aktivitelerin doğasına olan bakış açılarının geliştirilmesi (Tzanakis ve Arcavi, 2000; (Özdemir ve Göktepe Yıldız, 2015),
- Matematiği anlaşılabilir, ilginç ve daha fazla yaklaşılabılır kılması (Fried, 2001),
- Matematiğe yönelik tutum ve öğrenme motivasyonunu olumlu yönde etkileyebilmesi ve öğretmenlerin öğretim etkinliklerini zenginleştirmesidir (Tzanakis ve Arcavi, 2000).

Ayrıca Baki (2014) matematik tarihinin önemini aşağıdaki maddelerle açıklamıştır.

- Matematik tarihi bir matematikçi için ilişkileri sezmenin, varsayımda bulunmanın, çürütmenin ve kanıtlamanın vazgeçilmez düşünme adımları olduğunu göstermektedir.
- Matematik tarihi öğrencilere matematiğin düşünce dünyamızı nasıl şekillendirdiği ve geliştirdiği hakkında bilgi verir.
- Matematik tarihi öğrencilere matematiksel kurallar altında yatan nedenleri ve niçinleri gösterir.
- Matematik tarihi matematiğin farklı kültürlerde nasıl yer edindiği hakkında bilgi verir.
- Matematik tarihi diğer bilimlerle matematiğin ilişkisini gösterir.
- Öğrencilerin konulara yönelik ilgisini artırır.
- Matematik tarihi öğrencilere matematiğin kendini yenileyerek gelişen bir bilim olduğunu gösterir.

Bu gerekçelerin yerine getirilmesinde matematik tarihi amaç ve araç olarak kullanılabilir. Amaç olarak kullanılmasında matematiğin geçmişten günümüze gelişerek geldiğini gösteren ve farklı kültürlerin ürünü olduğunun anlaşılması için yapılan faaliyetler gözönünde bulundurulmalıdır. Örneğin Hayyam'ın geometrik modeller yardımıyla kübik denklemi çözmesiyle Cardano'nun nasıl farklılaştığını açıklayan etkinliklerle karşılaşan öğrenciler matematiğin dinamik yapısını fark etmeleri yanısıra matematiğin giderek soyut bir yapıya dönüştüğünü de anlamak-