

Prof. Dr.
*Salim
Yüce*

LINEER CEBİR

6. Baskı

 PEGEM
AKADEMI



Prof. Dr. *Salim Yüce*

LİNEER CEBİR

ISBN 978-605-318-030-2

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2023, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilmektedir.

1. Baskı: Ocak 2015, Ankara

6. Baskı: Ekim 2023, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türüldür

Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Kuyrukcu

Kapak Tasarım: Öğr. Gör. Dr. Murat Dağıtmaç

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.

İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara

Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: pegem@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

*Bu kitabımı; vatan uğruna canlarını feda etmiş aziz şehitlerimize;
hayat kaynağım, canım çocuklarım Kaan ve Barış'a
ithaf ediyorum.*

Prof. Dr. *Salim Yüce*

1974 Tokat/Niksar'da doğdu. İlkokul-ortaokul-liseyi Tokat'ta tamamladı. 1992-1996 yılları arasında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü, 1996-1999 yılları arasında aynı üniversitede Matematik/Geometri alanında yüksek lisansını, 1999-2004 yılları arasında doktorasını tamamladı. 2006 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik bölümünde Doktor Öğretim Üyesi olarak atandı ve aynı yıl Doçent unvanını aldı. 2012 yılında Yıldız Teknik Üniversitesinde Profesör olarak atandı.

2009 yılında Fen Bilimleri Enstitüsünde Müdür Yardımcılığı, 2012 yılında Rektör Yardımcılığı görevlerinde bulundu. 2016 yılında Yıldız Teknik Üniversitesinde Rektör adayı oldu. 2018 yılında YÖK-TEBİP Matematik Üstün Başarı Sınıfında görevlendirildi. Üniversite Yönetim Kurulu ve Senato Üyeliği görevlerini yerine getirmiş olup Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı Başkanlığı görevini Anabilim Dalı Başkanlıklarının kapandığı 2022 yılına kadar yürüttü. 2022 yılı Ağustos ayında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanlığına atanmış olup halen bu görevi yürütmektedir.

Prof. Dr. Salim YÜCE'nin akademik etkinlikleri kapsamında 8 adet kitap yazarlığı, 4 adet ulusal araştırma projesi, tamamlanmış 10 yüksek lisans ve 10 doktora ile devam eden 5 yüksek lisans ve 3 doktora tezi yöneticiliği, uluslararası toplam 87 makalesi, ulusal ve uluslararası kongrelerde 87 adet bildiri sunumu olup çeşitli dergilerde editörlük/hakemliği, 13. Ulusal Geometri Sempozyumu Düzenleme Kurulu Başkanlığı ve Hagia Sophia Journal of Geometry (HSJG) dergisinin baş editörlüğü görevinde bulunmaktadır. Evli ve iki erkek çocuğu sahibidir.

Ön Söz

Bu kitap, üniversitelerin Matematik, Matematik Mühendisliği, Matematik Bilgisayar, İstatistik, Matematik Öğretmenliği ve Mühendislik Bölümlerinde okutulan Lineer Cebir dersine temel olmasının yanı sıra lisansüstü düzeyindeki tüm programlarda öğrenim gören öğrencilerin ve akademisyenlerin faydalanacağı düşüncesiyle kaleme alınmıştır. Ayrıca Lineer Cebir'in Matematik Bölümündeki diğer derslerin temeli olması nedeniyle kitabın tüm Matematik derslerine iyi bir kaynak oluşturması planlanmıştır.

Bu kitabın en önemli özelliği gerek lisans gerekse lisansüstü hatta servis dersi olarak okutulan Lineer Cebir dersinin tüm öğrencilerine hitap edecek şekilde bölümlere ayrılarak sade bir dille hazırlanmasıdır. Her bölümün içerisinde konuların daha iyi anlaşılması amacıyla konu ile ilgili yeterli kadar çözümlü sorular ile bölüm sonunda okuyucular için Alıştırmalar verilmiştir.

Kitabın birinci baskısının yazımında yardımcı olan Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ ile son baskının düzenlenmesinde büyük emeği geçen doktora öğrencim Kübra ÇETİNERK nezdinde tüm geometri grubu asistanlarıma teşekkür ederim.

Son olarak, akademik hayatımın her noktasında yanımda olan Hocam Sayın Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU'na ve Hocamız Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU'na emekleri için teşekkürlerimi sunarım.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
sayuce@yildiz.edu.tr

İçindekiler

BÖLÜM 1 GRUP-HALKA-CİSİM

1.1	Grup	2
1.2	Halka	5
1.2.1	Halka İçin Elemanter Özellikler	5
1.3	Cisim	9
1.4	Alıştırmalar	11

BÖLÜM 2 VEKTÖR UZAYLARI

2.1	Vektör	14
2.1.1	Yönlü Doğru Parçalarının Paralellik Bağıntısı	15
2.1.2	Nokta Vektör Eşlemesi	17
2.2	Düzlemdeki Vektörler Üzerine İşlemler	18
2.3	Düzlemde Afin Koordinat Sistemi	23
2.3.1	İki Vektörün Lineer Bağımsızlığı	23

2.3.2	Afin Koordinat Sistemi	24
2.4	Vektör Uzayları	26
2.4.1	Vektör Uzayı Aksiyomlarından Çıkan Sonuçlar	26
2.5	Vektör Uzayı Örnekleri	30
2.5.1	Vektör Uzaylarının Direkt Çarpımı	33
2.6	\mathbb{R}^n Vektör Uzayında Geometrik Yapılar.....	35
2.6.1	\mathbb{R}^n Uzayında Eğri	36
2.7	Modül.....	37
2.8	Alt Vektör Uzayları	38
2.9	Lineer Birleşim.....	41
2.10	Alıştırmalar	43

BÖLÜM 3

İÇ ÇARPIM UZAYLARI

3.1	İç Çarpım Fonksiyonu.....	46
3.2	\mathbb{R}^n ve \mathbb{C}^n Üzerinde Standart İç Çarpım Fonksiyonları.....	47
3.3	Öklid Uzayının Metrik Özellikleri	49
3.3.1	\mathbb{R}^n Uzayında Bir Vektörün Uzunluğu.....	49
3.3.2	\mathbb{R}^n İki Nokta Arasındaki Uzaklık	49
3.3.3	Bir Skaler ile Bir Vektörün Çarpımı	50
3.3.4	İki Vektör Arasındaki Açık	50
3.3.5	\mathbb{R}^n Uzayında İki Vektörün Dikliği.....	51
3.4	İç Çarpımın Geometrik Yorumu	52
3.4.1	İzdüşüm Vektörü.....	52

3.4.2	Doğru ve Düzlem	54
3.5	İç Çarpım Uzayında Schwartz Eşitsizliği	56
3.6	Ortonormal Vektör Sistemi	62
3.7	L^2 İç Çarpımı	65
3.8	Alıştırmalar	66

BÖLÜM 4

VEKTÖR UZAYLARINDA BAZ VE BOYUT

4.1	Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık	70
4.2	Vektör Uzaylarında Baz ve Boyut.....	73
4.3	Gram–Schmidt Ortogonalleştirme Metodu (Ortonormalleştirme Metodu)	81
4.4	Alt Uzayların Boyutları.....	84
4.5	Alıştırmalar	87

BÖLÜM 5

ÖZEL VEKTÖR UZAYLARI

5.1	Direkt Toplam Uzayı.....	90
5.2	İç Çarpım Uzaylarında Ortogonal Alt Uzay ve Ortogonal Kompleman	91
5.3	Alıştırmalar	96

BÖLÜM 6

MATRİSLER

6.1	Matrisler	98
6.2	Matris Uzayı: Matrislerde İşlemler	100
6.2.1	Toplama İşleminin Özellikleri	102
6.2.2	Dış İşlemin Özellikleri	102
6.2.3	Matris Çarpımı	104
6.2.3.1	Çarpma İşleminin Özellikleri	105
6.2.4	Bir Matrisin Tersi ve Transpozu	107
6.3	Özel Matrisler	111
6.4	Bir Matrisin Eşelon Formu.....	117
6.5	Elemanter Operasyonlar.....	118
6.5.1	Matrisler İçin Elemanter Operasyonlar	119
6.6	Elemanter Operasyonların Uygulamaları.....	123
6.6.1	Çarpanlara Ayırma	123
6.6.2	Bir Matrisin Tersinin Bulunması.....	124
6.6.3	Lineer Bağımsızlık-Bağımlılık	125
6.6.4	Bir Matrisin Rankı	125
6.7	Bir Matrisin İzi ve Özellikleri.....	128
6.8	Koordinatlar	130
6.9	Bazlar Arasındaki Geçiş Matrisi	132
6.10	Alıştırmalar	134

BÖLÜM 7

LİNEER DÖNÜŞÜMLER

7.1	Lineer Dönüşüm, Çekirdek, Rank	140
7.2	Boyut Teoremi	149
7.3	Lineer İzomorfizm	151
7.4	Ortogonal İzdüşüm	157
7.4.1	Bir Vektörün İç Çarpım Uzayı Üzerine Dik İzdüşümü	157
7.4.2	Bir İç Çarpım Uzayının Alt Uzayı Üzerine Dik İzdüşümü.....	158
7.5	Bölüm Uzayı	160
7.6	$HOM(V, W)$ Uzayı.....	161
7.6.1	Modüllerin Lineer Dönüşümü	167
7.7	Dual Vektör Uzayı ($V^* : V \xrightarrow{\text{lineer}} \mathcal{F}$)	167
7.8	Sıfırlayan (Annihilatör)	172
7.9	Alıştırmalar	173

BÖLÜM 8

LİNEER DÖNÜŞÜM-MATRİS İLİŞKİSİ VE UYGULAMASI

8.1	Her Matrise Bir Lineer Dönüşüm Karşılık Gelir	178
8.2	Her Lineer Dönüşüme Bir Matris Karşılık Gelir	179
8.2.1	Standart Vektör Uzayları Üzerinde Tanımlanan Her Lineer Dönüşüme Bir Matris Karşılık Gelir	179
8.2.2	Herhangi Vektör Uzayları Üzerinde Tanımlanan Her Lineer Dönüşüme Bir Matris Karşılık Gelir	182
8.3	\mathbb{R}^2 Üzerinde Lineer Dönüşümler ve Matrislerin Geometrisi	185

8.4	\mathbb{R}^3 Üzerinde Lineer Dönüşümler ve Matrislerin Geometrisi	187
8.5	İki Lineer Dönüşümün Direkt Toplamı	190
8.6	Bir Lineer Dönüşümün Rankı	194
8.7	Bazların Değişimi.....	198
8.7.1	Baz Değişiminin Bir Diğer Anlamı	202
8.7.2	Baz Değişiminin En Genel Hali	203
8.8	Benzerlik	207
8.9	Alıştırmalar	209

BÖLÜM 9

ÇOK LİNEER FONKSİYONLAR VE TENSÖRLER

9.1	Vektör Uzayları Üzerinde r -Lineer Fonksiyonlar.....	212
9.2	Tensörler ve Tensör Uzaıyı	215
9.3	Modül Üzerinde r -Lineer Fonksiyonlar	217
9.4	Alıştırmalar	220

BÖLÜM 10

DETERMİNANTLAR

10.1	Permütasyon Kavramı.....	222
10.2	Determinant Fonksiyonu	226
10.2.1	Determinant Fonksiyonunun Temel Özellikleri.....	227
10.3	Determinant Hesaplamaları.....	233
10.3.1	Determinant Açılımları.....	235

10.4	Bir Matrisin Eki ve Ek Matris Yardımıyla Matrisin Tersi ...	239
10.5	Determinant Uygulamaları	244
10.5.1	Determinant Rankı	244
10.5.2	Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık	245
10.5.3	Vektörel Çarpım	246
10.5.4	Karma Çarpım	247
10.6	Bir Lineer Dönüşümün Determinantı ve İzi	250
10.7	Alıştırmalar	253

BÖLÜM 11

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

11.1	Lineer Denklem Sistemleri	258
11.2	Katsayılar Matrisinin Tersi Yardımıyla Lineer Denklem Sisteminin Çözümü	259
11.3	Elemanter Operasyonlar Yardımıyla Lineer Denklem Sisteminin Çözümü	260
11.3.1	Homojen Lineer Denklem Sistemi	262
11.4	Determinant Yardımıyla Lineer Denklem Sisteminin Çözümü 264	
11.4.1	Cramer Yöntemi	264
11.4.2	Cramer Olmayan Lineer Denklem Sistemleri	267
11.5	Lineer Denklem Sistemlerinin Analitik Geometri Uygulamaları	270
11.6	Alıştırmalar	277

BÖLÜM 12

LİNEER DÖNÜŞÜMLERDE ÖZDEĞER, ÖZVEKTÖR VE KÖŞEĞENLEŞTİRME

12.1	Lineer Dönüşümün Karakteristik Değerleri, Karakteristik Vektörleri ve Karakteristik Uzay.....	284
12.2	Özel Lineer Dönüşümlerin Karakteristik Değeri ve Karakteristik Vektörleri	288
12.3	Lineer Dönüşümlerde Köşegenleştirme.....	288
12.4	Alıştırmalar	291

BÖLÜM 13

MATRİSLERDE ÖZDEĞER, ÖZVEKTÖR VE KÖŞEĞENLEŞTİRME

13.1	Bir Matrisin Karakteristik Değerleri, Karakteristik Vektörleri	294
13.1.1	Karakteristik Polinom: Matrisin Asli Minörü ve Determinantı	301
13.1.2	Özel Matrisin Karakteristik Değerleri, Karakteristik Vektörleri.....	306
13.2	Cayley Hamilton Teoremi	311
13.2.1	Matris Fonksiyonları (Polinomları)	311
13.2.2	Cayley Hamilton Teoremi ve Uygulamaları.....	313
13.3	Matrislerde Köşegenleştirme	317
13.4	Kompleks Matrislerde Özdeğer, Özvektör ve Köşegenleştirme	322
13.5	Kompleks Özdeğerli Reel Matrisler.....	324
13.6	Özel Matrislerde Köşegenleştirme	327

13.7	Alıştırmalar	328
------	--------------------	-----

BÖLÜM 14

BİLİNEER FORMLAR VE KUADRATİK FORMLAR

14.1	Bilineer Formlar.....	332
14.1.1	Bilineer Dönüşüm Uzayı ve Bilineer Dönüşümün Matrisi	333
14.1.2	Dejenere ve Non-Dejenere Bilineer Form.....	339
14.2	Simetrik Bilineer Form.....	341
14.2.1	Simetrik Bilineer Formun İndeksi ve İşareti.....	343
14.2.2	B -Ortogonal ve B -Ortogonal Kompleman	344
14.2.3	Skaler Çarpım Uzayı	347
14.2.4	İç Çarpım Fonksiyonu	348
14.2.5	Gram-Schmidt B -Ortogonalleştirme Metodu	349
14.2.6	Eşlenik Simetrik Form	351
14.3	Kuadratik Formlar	352
14.3.1	Asli Eksen Teoremi.....	356
14.3.2	Kuadratik Formun İşareti ve Ataleti	360
14.4	Kanonik Form	362
14.5	Geometrik Uygulama.....	366
14.5.1	Koniklere Uygulama	367
14.5.2	Kuadrik Yüzeylere Uygulama	370
14.6	Bilineer Form-Dual Uzay İlişkisi.....	370
14.6.1	Her $V \times V \rightarrow \mathcal{F}$ Bilineer Formuna $V \rightarrow V^*$ Lineer Dönüşümü Karşılık Gelir	370

14.6.2	Her $V \rightarrow V^*$ Lineer Dönüşümüne Bir $V \times V \rightarrow \mathcal{F}$ Bilineer Formu Karşılık Gelir.....	371
14.6.3	İki lineer Formun Tensörel Çarpımı	372
14.7	Alıştırmalar	373

BÖLÜM 15

LİNEER DÖNÜŞÜMÜN DUALİ VE EKİ

15.1	Lineer Dönüşümün Duali ve Transpozu ($L^* : W^* \rightarrow V^*$)	376
15.2	Lineer Dönüşümün Eki ($L' : W \rightarrow V$)	380

BÖLÜM 16

İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA LİNEER DÖNÜŞÜMLER

16.1	İç Çarpım Uzayları Üzerinde Lineer Fonksiyonel	384
16.2	İç Çarpım İzomorfizm.....	385
16.3	Dual İç Çarpım.....	387
16.4	İç Çarpım Uzaylarında Lineer Dönüşümün Duali	387
16.5	İç Çarpım Uzaylarında Lineer Dönüşümün Eki.....	388
16.6	İç Çarpım Uzaylarında Bazı Özel Dönüşümler.....	393
16.6.1	Hermit Dönüşüm ve Hermit Matris	393
16.6.2	Simetrik Dönüşüm ve Simetrik Matris	395
16.6.3	İzometri, İç Çarpımı Koruyan Dönüşümler.....	396
16.6.4	Üniter Dönüşüm ve Üniter Matris	399
16.6.5	Ortogonal Dönüşüm ve Ortogonal Matris.....	401
16.6.6	Normal Dönüşüm ve Normal Matris	402

16.7	Özel Lineer Dönüşümlerin Karakteristik Değeri ve Karakteristik Vektörleri	404
16.8	Alıştırmalar	407

BÖLÜM 17

MATRİS TEORİSİ

17.1	Bir Matrisin Null Uzayı ve Görüntü Uzayı	410
17.2	Simetrik ve Ortogonal Matris Geometrisi	418
17.2.1	Simetrik Matrisin İndeksi ve İşareti	418
17.2.2	Ortogonal Matrislerin Geometrisi	420
17.2.3	Köşegenleştirme ve Ortogonal Köşegenleştirme	426
17.3	Blok Matrisler	436
17.3.1	Blok Matrislerde Elementer Operasyonlar	438
17.3.2	Blok Matrislerde Determinant	439
17.3.3	Blok Matrisin İnvresi	445
17.3.4	Özel Blok Matrisler	446
17.4	Özel Matrisler	448
17.4.1	Dairesel Matris	448
17.4.2	Vandermonde Matrisi	449
17.4.3	Wronski Matrisi	450
17.4.4	Hadamard Matrisi	451
17.5	Kronecker ve Hadamard Çarpım	452
17.6	Vektörlerde Dyadik Çarpım	457
17.7	Bir Matrisin Karekökü	461
17.7.1	Cayley Hamilton Yöntemi	464

17.7.2	Köşegenleştirme Yöntemi	466
17.7.3	Schur Yöntemi.....	467
17.8	Matris Fonksiyonları ve Matris Normları	468
17.8.1	Matris Fonksiyonlarında Yakınsaklık, Türev ve İntegral.....	469
17.8.2	Matris Normları	471
17.9	Üstel Matrisler ve Üstel Matris Fonksiyonları	478
17.9.1	Üstel Matrisler	478
17.9.2	Üstel Matris Fonksiyonları.....	487
17.9.3	Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerine Uygulanması	493
17.10	Pozitif Tanımlı Matrisler.....	498
17.10.1	Pozitif Tanımlı Matrislerin Özdeğerleri.....	508
17.10.2	Kronecker ve Hadamard Çarpımın Pozitif Tanımlı Matrislere Uygulanması.....	511
17.10.3	Pozitif Tanımlı Matrisin Karekökü	512
17.10.4	Blok Matrislerde Pozitif Tanımlılık	513
17.10.5	İşaretleli Minör, Asli Minör ve Temel Asli Minör.....	515
17.10.6	Geometri ve Analiz Uygulamaları	520
17.11	Bir Matrisin Ayrışmaları.....	524
17.11.1	Bir Matrisin LU -Ayrışımı.....	524
17.11.2	Bir Matrisin LDU -Ayrışımı	524
17.11.3	Cholesky Ayrışımı.....	525
17.11.3.1	Cholesky Ayrışımı Formülleri	526
17.11.3.2	LDL^t -Ayrışımı	526
17.11.3.3	Blok Matrisler için LDL^t -Ayrışımı	527
17.11.4	Bir Matrisin Özdeğer Ayrışımı (Eigenvalue Decomposition = EVD)...	528
17.11.5	Bir Matrisin Hessenberg Ayrışımı	529

17.11.6	Bir Matrisin Schur Ayrışımı	529
17.11.7	Bir Matrisin Singüler Değer Ayrışımı (Singular value decomposition = SVD).....	530
17.11.8	Matrisler için QR-Ayrışımı	537
17.11.9	Bir Matrisin Polar Ayrışımı.....	539
17.12	Kompleks Matrisler.....	540
17.13	Dual Matrisler	541
17.14	Alıştırmalar	542

BÖLÜM 18

MINKOWSKI UZAYINDA LİNEER CEBİR

18.1	\mathbb{R}_v^n Minkowski Uzayı.....	550
18.2	\mathbb{R}_1^3 Minkowski Uzayı.....	551
18.3	\mathbb{R}_1^2 Lorentz-Minkowski Düzlemi	557
18.4	Lorentz İç-Çarpımın Geometrik Özellikleri.....	564
18.5	Semi-Ortogonal Grup	566
18.6	Lorentz Matris Çarpımı.....	568
18.7	Alıştırmalar	572