Çözümlü Yüksek Matematik Problemleri 1 (Analiz 1-2)

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

5. Baskı

PEGEM AKADEMİ

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

ÇÖZÜMLÜ YÜKSEK MATEMATİK PROBLEMLERİ 1 (Analiz 1-2)

ISBN 978-605-318-249-8

1. Baskı: Eylül 2015, Ankara
5. Baskı: Ekim 2022, Ankara

Yayın-Proje: Zeynep Güler
Dizgi-Grafik Tasarım: Tuğba Kaplan
Kapak Tasarım: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler - Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Ön Söz

Bu kitap, üniversitelerin eğitim, fen ve mühendislik fakültelerinde okutulan Analiz I – II ve Genel Matematik I – II derslerine yardımcı olmak amacıyla yazılmıştır.

Kitap dokuz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm önbilgiler olarak düşünülebilecek kümeler, sayılar, denklemler ve fonksiyonlar konularını içermektedir. İkinci bölüm dizinin ve fonksiyonun limiti, üçüncü bölüm süreklilik, dördüncü bölüm türev ve türev alma kuralları, beşinci bölüm türevin geometrik, fiziksel uygulamaları, maksimum ve minimum problemleri, grafik çizimi ve kutupsal koordinatlar konularından oluşmaktadır. Son dört bölüm ise sırasıyla; belirsiz integral, belirli integral, belirli integralin uygulamaları ve genelleştirilmiş integral konularını içermektedir. Her bölüm konu ile gerekli tanım ve teoremler verildikten sonra çok sayıda çözülmüş problemden oluşmaktadır. Birçok problem birden fazla yolla çözülmüştür.

Kitabın kolay okunup, anlaşılabilmesi için gerekli titizliğin gösterilmesine rağmen yine de bazı hatalar olabilir. Bu konuda her türlü uyarı ve eleştiride bulunacak meslektaş ve öğrencilere şimdiden teşekkürlerimi sunarım.

Diyarbakır 2015
Erhan PİŞKİN
episkin@dicle.edu.tr

Kitabımızın 5. Baskısının faydalı olması dileğiyle…

Diyarbakır 2022
Erhan PİŞKİN

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
	Ön Söz……………………………………....	**iii**
1.	**ÖN BİLGİLER**………………………………	**1**
1.1.	Kümeler……………………………………….	1
1.2.	Sayılar…………………………………………	18
1.2.1	Karmaşık Sayılar………..………….………..	21
1.2.2.	Sonlu ve Sonsuz Kümeler……….…………	32
1.2.3.	Cebirsel ve Transandant Sayılar……..…..……	33
1.2.4	Reel Sayı Aralıkları…………...………………	34
1.2.5.	Mutlak Değer…………………….……………	34
1.2.6.	Üslü ve Köklü Sayılar…………...……………	36
1.3.	Tümevarım Yöntemi…………………….………	38
1.3.1.	Toplam ve Çarpım Sembolleri…………..……	42
1.4.	Denklemler……………………………………	47
1.4.1.	İkinci Dereceden Denklemler…………………	47
1.4.2.	Üçüncü Dereceden Denklemler……………..…	51
1.4.3.	Dördüncü Dereceden Denklemler……....……	56
1.5.	Fonksiyonlar……………..……………………	60
1.5.1.	Kartezyen Çarpım……….…..………………..	60
1.5.2.	Bağıntı……………………..………………….	62
1.5.3.	Fonksiyon………...…………………………	68
1.5.4.	Parçalı Fonksiyon……………..………………	78
1.5.5.	Mutlak Değer Fonksiyonu….………………...	80

1.5.6.	İşaret (Signum) Fonksiyonu………….………	87
1.5.7.	Tam Değer Fonksiyonu……..………………..	89
1.5.8.	Trigonometrik Fonksiyonlar………..………..	96
1.5.9.	Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar…………….	105
1.5.10.	Hiperbolik Fonksiyonlar…………..………….	107
2.	**LİMİT**…………………..…………………....	**111**
2.1.	Diziler……………………….……...…..…..	111
2.1.1.	Dizinin Limiti………......................................	117
2.1.2.	Cauchy Dizisi…………………..….................	121
2.1.3.	Limit Hesaplanırken Kullanılacak Bazı Önemli Teoremler……………………………	122
2.1.4.	Terimleri Arasında Tekrarlama Bağıntısı Bulunan Diziler……………………………….	126
2.2.	Bir Fonksiyonun Limiti…………….……...	146
3.	**SÜREKLİLİK**………………..………………	**181**
4.	**TÜREV**...	**197**
4.1.	Türev Kavramı…………..…….……………..	197
4.2.	Türev ve Süreklilik İlişkisi…....……………...	198
4.3.	Türev Alma Kuralları…………...…...…........	199
4.4.	Bileşke Fonksiyonunun Türevi……..…………	201
4.5.	Ters Fonksiyonunun Türevi…………....…..…	202
4.6.	Trigonometrik Fonksiyonların Türevi……..…	203

4.7. Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi…... 205
4.8. Logaritma Fonksiyonunun Türevi……………. 206
4.9. Üstel Fonksiyonların Türevi………....………. 207
4.10. Hiperbolik Fonksiyonların Türevi….………… 208
4.11. Logaritmik Türev………………..…………… 209
4.12. Yüksek Mertebeden Türevler…..…………….. 210
4.13. Parametrik Fonksiyonların Türevi...…………. 212
4.14. Kapalı Fonksiyonların Türevi……….……….. 214
4.15. Özel Tanımlı Fonksiyonların Türevleri……..... 215
4.16. Diferansiyel………………….……………….. 233
4.17. Lineer Yaklaşımlar (Lineerleştirme)…..…….. 234
4.18. Yaklaşık Değer………..……………..…….. 235
4.19. Bağımlı Oranlar…………………………..… 241

5. TÜREVİN UYGULAMALARI…….……..... **255**
5.1. Belirsiz Şekiller…………………...…..…… 255
5.2. Türevin Geometrik Anlamı…………..……… 270
5.3. Türevin Fiziksel Anlamı……………………… 272
5.4 Teğet altı ve Normal altı Uzunluğu…...……… 276
5.5. Eğrinin Eğriliği…….………………...…………. 279
5.6. Eğrilik Merkezi ve Eğrilik Çemberi………….. 281
5.7. Türev ile İlgili Teoremler………..………… 296
5.8. Artan ve Azalan Fonksiyonlar…………..…… 301
5.9. Konveks ve Konkav Fonksiyonlar……..……. 306

5.10. Grafik Yorumu…………………..………… 310

5.11. Maksimum ve Minimum Problemleri……..… 325

5.12. Grafik Çizimi………………..…...…………… 336

5.13. Kutupsal Koordinatlar……………..………. 358

6. BELİRSİZ İNTEGRAL……………..…....... 377

6.1. Belirsiz İntegral……….…………………… 377

6.2. Temel İntegral Formülleri…………...………. 378

6.3. İntegral Alma Yöntemleri……….………… 385

6.3.1. Değişken Değiştirme Yöntemi…….………. 385

6.3.2. Kısmi İntegral Alma Yöntemi……..………… 406

6.3.3. Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi…………..…. 422

6.3.4. Trigonometrik İntegraller…………..……… 436

6.3.5. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ İfadesini İçeren İntegraller…..….. 450

6.3.6 Binom İntegralleri……………….…..……….. 456

7. BELİRLİ İNTEGRAL………...…..……….. 463

7.1. Bir Aralığın Parçalanması …………………… 463

7.2. Riemann İntegrali………………..………… 465

7.3. İntegrallenebilen Fonksiyon Sınıfları……..….. 478

7.4. Bazı Limitlerin İntegral Yardımıyla Hesabı..… 482

7.5. İntegralin Türevi……………………………… 484

7.6. Sayısal İntegrasyon……………...…………. 501

7.6.1. Dikdörtgenler Yöntemi…………...………….. 501

7.6.2. Yamuklar Yöntemi…………….…………….. 503

7.6.3. Simpson Yöntemi……………….…………… 504

8. BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI…………………………. 509

8.1. Alan Hesabı……….………..…………… 509

8.2. Eğri (Yay) Uzunluğunun Hesabı………..…. 522

8.3. Hacim Hesabı…….……………...…………… 534

8.3.1. Kesit Yöntemi……….….…………………… 534

8.3.2. Disk Yöntemi……………….……………….. 535

8.3.3. Kabuk (Silindirik Tabakalar) Yöntemi………. 541

8.4. Dönel Yüzeylerin Alanı…………..……….. 551

9. GENELLEŞTİRİLMİŞ (HAS OLMAYAN) İNTEGRALLER……………………………. **563**

9.1. Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller…..… 564

9.2. İkinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller…..…. 573

9.3. Üçüncü Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller….… 578

Temel Formüller……………………..……. **587**

Grek Alfabesi……………………………….. **590**

KAYNAKLAR…….……………………….….. **591**

DİZİN……………………...……………… **592**

1. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1.1. KÜMELER

Kümenin kesin bir tanımı yapılmamakla birlikte "iyi tanımlanmış neslelerin topluluğudur" şeklinde ifade edilebilir. Burada iyi tanımlanmışlık ile kastedilen verilen bir elemanın kümeye ait olup olmadığının belirlenmesidir.

Kümeler genellikle $A,\ B,\ C, ...$ gibi büyük harflerle, elemanları ise $a,\ b,\ c, ...$ gibi küçük harflerle gösterilir.

Eğer a nesnesi A kümesinin elemanı ise

$$a \in A$$

ile a nesnesi A kümesinin elemanı değil ise

$$a \notin A$$

şeklinde gösterilir.

Bir kümenin elemanlarının $\{...\}$ parantezi içine yazılarak verilmesine *liste yöntemi* ile gösterim,

Bir kümenin elemanlarının kapalı bir geometrik şeklin içinde verilmesine *Venn şeması* ile gösterim,

Elemanların ortak bir özelliği kullanılarak $\{x : \ x \text{ lerin ortak özelliği}\}$ olarak verilmesine *ortak özellik yöntemi* denir.

Örnek. Liste yöntemi ile verilmiş

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

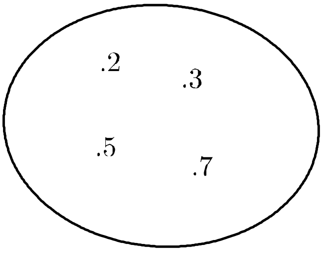
[1] $\in$ sembolünü ilk kez 1895 te Giuseppe Peano (1858-1932) kullanmıştır. Peano ϵ (epsilon) sembolünü kullanırken 1903 te Bertrand Russel (1872-1970) epsilonu $\in$ sembolüne dönüştürmüştür.

[1] John Venn (1834-1923).

kümesi ortak özellik yöntemi ile

$$A = \{x : \ x, 10 \text{ dan küçük asal sayılar}\},$$

Venn şeması olarak



şeklinde gösterilebilir.

Tanım. Hiç elemanı olmayan kümeye *boş küme* denir. $\{\}$ veya $\emptyset$ şeklinde gösterilir.

Boş küme $\emptyset = \{x : \ x \neq x\}$ şeklinde de tanımlanabilir.

Tanım. A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı oluyorsa A kümesi B kümesinin *alt kümesi*dir denir ve

$$A \subset B \text{ veya } B \supset A$$

şeklinde gösterilir.

Teorem.

i. Her küme kendisinin alt kümesidir. Yani

$$A \subset A$$

dır.

[1] $\emptyset$ sembolünü ilk kez 1939 da N. Bourbaki adlı matematik grubu kullanmıştır.
[1] $\subset$ sembolü ilk kez 1890 da Ernst Schröder (1841-1902) tarafından kullanılmıştır.

ii. Boş küme her kümenin alt kümesidir. Yani

$$\emptyset \subset A$$

dır.

iii. $(A \subset B$ ve $B \subset C) \Leftrightarrow A \subset C$ dır.

Tanım. Bir A kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan kümeye A nın *kuvvet kümesi* denir ve $P(A)$ ile gösterilir.

Örnek.

$$A = \{a, b, c\}$$

kümesinin kuvvet kümesini bulunuz.

Çözüm.

$$P(A) = \{\emptyset, \ \{a\}, \ \{b\}, \ \{c\}, \ \{a, b\}, \ \{a, c\}, \ \{b, c\}, \ \{a, b, c\}\}$$

Tanım. Eğer

$$A \subset B \text{ ve } B \subset A$$

ise A ve B kümeleri *eşittir* denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir.

Tanım. Bir konuda çalışırken ele alının bütün kümeleri kapsayan en geniş kümeye *evrensel küme* denir ve E ile gösterilir.

Tanım. A ve B kümelerinin bütün elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin *birleşimi* denir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir. Buna göre

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

dır.

Teorem.

i. $A \cup A = A$ (Tek kuvvet özelliği)

ii. $A \cup B = B \cup A$ (Değişme özelliği)

iii. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Birleşme özelliği)

iv. $A \cup \emptyset = A$ (Etkisiz eleman özelliği)

Tanım. A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin *kesişimi (arakesiti)* denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir. Buna göre

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

dır.

Teorem.

i. $A \cap A = A$ (Tek kuvvet özelliği)

ii. $A \cap B = B \cap A$ (Değişme özelliği)

iii. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Birleşme özelliği)

iv. $A \cap \emptyset = \emptyset$

v. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Kesişimin birleşme üzerine dağılma özelliği)

vi. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Birleşimin kesişme üzerine dağılma özelliği)

Sonlu sayıdaki $A_1, \ A_2, ..., A_n$ kümelerinin kesişimi

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

birleşimi

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

şeklinde, sonsuz sayıdaki $A_1, \ A_2, ...$ kümelerinin kesişimi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

[1] $\cup$ ve $\cap$ sembollerini ilk kez 1888 de Giuseppe Peano (1858-1932) kullanmıştır.

birleşimi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

şeklinde gösterilir.

Tanım. Kesişimleri boş olan kümelere *ayrık kümeler* denir. Yani

$$A \cap B = \emptyset$$

ise A ve B kümeleri ayrıktır.

Tanım. A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A *fark* B kümesi denir. $A \backslash B$ veya $A - B$ şeklinde gösterilir. Buna göre

$$A \backslash B = \{x : \ x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

dır.

Teorem. $A \backslash B = A \cap B'$ dır.

Tanım. E evrensel küme $A \subset E$ olsun. E de olup A da olmayan elemanların kümesine A nın *tümleyeni* denir. A' veya $\overline{A}$ ile gösterilir. Bu tanıma göre

$$A' = \{x : \ x \in E \text{ ve } x \notin A\}$$

dır.

Teorem (De Morgan Kuralları).
i. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
ii. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Tanım. A ve B kümelerinin birleşiminde olup kesişimlerinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin *simetrik farkı* denir. Buna göre

$$A \triangle B = \{x : \ x \in A \cup B \text{ ve } x \notin A \cap B\}$$

dır. Buradan

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

veya

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

dır.

Küme Ailesi

$A,\ B,\ C, ...$ şeklinde verilmiş kümeleri $I = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesi yardımı ile $A_1,\ A_2,\ A_3, ...$ şeklinde yazabiliriz. Burada I ya *indis (indeks) kümesi* bu kümenin her i elemanına *indis (indeks)* denir. Her $i \in I$ için A_i kümesine *indislenmiş (indekslenmiş* veya *damgalanmış) küme* denir. Elemanları bir I indis kümesi ile indislenmiş kümelerden oluşmuş kümeye *kümeler ailesi* denir. Buna göre

$$\mathcal{A} = \{A_i : \ i \in I\}$$

dır.

Örnek.

$$\mathcal{A} = \{\{a\},\ \{a, b\},\ \{b, c\},\ \{a, c, d\}\}$$

olsun. Burada $I = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi ile

$$A_1 = \{a\},\ A_2 = \{a, b\},\ A_3 = \{b, c\},\ A_4 = \{a, c, d\},$$

yazılırsa küme ailesi

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\} \\ &= \{A_i : \ i \in I\} \end{aligned}$$

olur.

Tanım. $\mathcal{A} = \{A_i : \ i \in I\}$ ailesi verilsin. Bu durumda küme ailesinin birleşimi

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \ \exists i \in I \text{ için } x \in A_i\},$$

kesişimi ise

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x:\ \forall i \in I \text{ için } x \in A_i\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek.

$$\mathcal{A} = \{\{a\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{a,c,d\}\}$$

olsun. Burada $I = \{1,2,3,4\}$ kümesi ile

$$\mathcal{A} = \{A_i:\ i \in I\}$$

ailesi verilsin. Buna göre

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{a,b,c,d\}$$

ve

$$\bigcap_{i\in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$$

dır.

Teorem.
i. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$ (Genelleştirilmiş De Morgan Kuralı)
ii. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$ (Genelleştirilmiş De Morgan Kuralı)
iii. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J} (A_i \cap B_j)\right)$ (Genelleştirilmiş dağılma kuralı)
iv. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} (A_i \cup B_j)\right)$ (Genelleştirilmiş dağılma kuralı)