Diferensiyel Denklemler

Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

2. Baskı

PEGEM AKADEMİ

Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

DİFERENSİYEL DENKLEMLER

ISBN 978-605-318-321-1
DOI 10.14527/ 9786053183211

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarına aittir.

© 2021, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. A.Ş.'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere http://pegem.net adresinden ulaşılabilmektedir.

1. Baskı: Aralık 2015, Ankara
2. Baskı: Şubat 2021, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türlüdür
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Çetin
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Vadi Grafik Tasarım ve Reklamcılık Ltd. Şti.
İvedik Org. San. 1420. Cad. No: 58/1
Yenimahalle/ANKARA
Tel: 0 312 395 85 71

Yayıncı Sertifika No: 36306
Matbaa Sertifika No: 47479

İletişim

Karanfil 2 Sokak No: 45 Kızılay/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50 - 430 67 51
Dağıtım: 0312 434 54 24 - 434 54 08
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

Bazı konularını uzun yıllar lisans derslerinde okuttuğumuz ve diferensiyel denklem sistemleri ile sınır değer problemleri konularını yüksek lisans derslerinde göz önünde bulundurduğumuz bu kitap on bölüm halinde hazırlanmıştır.

Birinci bölümde, diferensiyel denklemlere giriş anlamında bazı ön bilgiler verilerek temel kavramlar tanıtılmaya çalışılmıştır.

İkinci bölümde, birinci mertebeden diferensiyel denklemler, bazı çözüm metotları, birinci mertebeden lineer denklemler ve lineer hale getirilebilen bazı denklemlerin çözümüne ilişkin çalışmalar yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, birinci mertebeden ve yüksek dereceden denklem tipleri ve çözüm metotları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, birinci mertebeden denklemlerin uygulamalarına dair bazı örnekler üzerinde durulmuştur.

Beşinci bölümde, birinci mertebeden bir başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği üzerinde çalışılmış olup tekil çözümlere sahip denklemlere ait özellikler incelenmiştir.

Altıncı bölümde yüksek mertebeden sabit katsayılı, lineer denklemler tanıtılmış ve bu denklemlerin çözüm metotlarına dair çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca değişken katsayılı olmasına rağmen sabit katsayılı hale getirilebilen Cauchy-Euler denkleminin çözümü incelenmiştir.

Yedinci bölümde, değişken katsayılı diferensiyel denklemlerin Taylor ve Frobenius serileri yardımıyla çözümü, Bessel denklemlerinin çözümü ve Fourier serisi metodu üzerinde çalışılmıştır.

Sekizinci bölümde, diferensiyel denklem sistemleri, özdeğer ve özvektör konuları ile özuzay ve özbaz kavramları üzerinde durulmuştur. Ayrıca üstel matrislere ait bazı özellikler incelenmiştir.

Dokuzuncu bölümde, sınır değer problemlerine yer verilmiştir. Burada, sınır değer problemine ait diferensiyel operatörün Green fonksiyonu ve Sturm-Liouville probleminin bazı özelliklerine dair konular üzerinde çalışılmıştır.

Onuncu bölümde Laplace dönüşümü, ters Laplace dönüşümü ve konvolusyon konuları üzerinde durulmuş ve diferensiyel denklemlere ait bazı uygulamaları incelenmiştir.

Bu kitap diferensiyel denklemler dersinin okutulduğu bölümlerde ders kitabı olabilecek şekilde hazırlanmıştır.

Konuların hazırlanışı aşamalarında gerekli hassasiyeti göstermemize rağmen hata ve eksiklerimizin olabileceğini kabul ederek okuyucu tarafından gelebilecek uyarılara açık olduğumuzu ve bundan memnuniyet duyacağımızı belirtmek isterim.

Akademik hayatımda her zaman yanımda hissettiğim hocalarım Prof. Dr. Nuri Kuruoğlu, Prof. Dr. Ömer Akın ve Prof. Dr. Oktay Muhtaroğlu'na, akademik çalışmalarım sürecinde bana gösterdikleri sabır ve desteklerinden dolayı eşime ve çocuklarıma, Pegem Akademi Yayıncılık şirket müdürü Sayın Servet Sarıkaya ve onun şahsında emeği geçenlere teşekkür ederim.

Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

ORCID No: 0000-0003-3212-8976

İKİNCİ BASKIYA ÖN SÖZ

Bu kitabın ikinci baskısında, birinci baskısına göre ilk başlardaki fonksiyon, türev ve diferensiyel gibi bazı tanımları genişletme fırsatımız olmuştur. Aynı zamanda görebildiğimiz bazı yazım hatalarımızı düzeltme imkanı bulduk. Bu yüzden kitabın ikinci baskısının yapılmasına imkan sağlayan hocalarımıza ve öğrencilerimize çok teşekkür ediyorum. Ayrıca kitabın basımını ve sunumunu üstlenen Pegem Akademi adına Şirket Müdürü sayın Servet Sarıkaya'ya ve emeği geçen yayınevi çalışanlarına teşekkür ederim.

Prof. Dr. Mustafa Kandemir

ORCID No: 0000-0003-3212-8976

İÇİNDEKİLER

Ön Söz iii
İkinci Baskıya Ön Söz v

1. BÖLÜM
GİRİŞ

Matematiksel Modeller 1
Temel Kavramlar 5
Diferensiyel Denklemlerin Elde Edilişi 31

2. BÖLÜM
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Değişkenlerine Ayrılabilen Diferensiyel Denklemler 35
Tam Diferensiyel Denklemler 38
İntegral Çarpanı 48
Homojen Diferensiyel Denklemler 56
Birinci Mertebeden Lineer Diferensiyel Denklemler 68
Bernoulli Denklemi 84
Riccati Denklemi 88

3. BÖLÜM
BİRİNCİ MERTEBEDEN VE YÜKSEK DERECEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Çarpanlara Ayrılabilen Denklemler 99
Bağımsız Değişkene Göre Çözülebilen Denklemler 102
Bağımlı Değişkene Göre Çözülebilen Denklemler 104
Bağımlı Değişkeni İçermeyen Denklemler 107
Bağımsız Değişkeni İçermeyen Denklemler 109
Clairaut Denklemi 114
Lagrange Denklemi 116

4. BÖLÜM
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN BAZI UYGULAMALARI

Yörüngeler 121
Dik Yörüngelerin Bulunması 121
Eğik Yörüngelerin Bulunması 126
Doğal Büyüme ve Azalma 129

5. BÖLÜM
BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Bazı Temel Kavramlar 137
Varlık ve Teklik Teoremleri 144
Çözümün Sürekliliği 164
Türeve Göre Çözülemeyen Denklemlerin Çözümünün Varlığı ve Tekliği 169
Tekil Nokta, Tekil Eğri, Tekil Çözüm ve Zarf 176
Türeve Göre Çözülebilen Birinci Mertebeden Denklemlerin Tekil Çözümleri 176
Türeve Göre Çözülemeyen Birinci Mertebeden Denklemlerin Tekil Çözümleri 178
p -diskriminant eğrileri 178
c -diskriminant eğrileri 180

6. BÖLÜM
YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Lineer Diferensiyel Denklemlere Ait Temel Kavramlar 189
Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer ve Homojen Denklemlerin Çözümü 195
Yüksek Mertebeden Homojen Olmayan, Sabit Katsayılı ve Lineer Denklemlerin Çözümü 207
Sabitlerin (Parametrelerin) Değişimi Metodu 209
Belirsiz Katsayılar Metodu 228
Operatör Metodu 248
Cauchy-Euler Diferensiyel Denklemi 254

7. BÖLÜM
LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KUVVET SERİLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Adi Nokta Civarında Diferensiyel Denklemlerin Çözüm Metodu 269
Tekil Nokta Civarında Diferensiyel Denklemlerin Frobenius Serisi ile Çözümü 283
Bessel Diferensiyel Denklemleri ve Bessel Fonksiyonları 311
Fourier Serisi Metotları 323
Tek ve Çift Fonksiyonların Fourier Serisi 327
Fourier Serisinin Yakınsaklığı 332
Fourier Serilerinin Uygulamaları 340

8. BÖLÜM
LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

Normal Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri 347
Sabit Katsayılı Homojen Normal Denklem Sistemlerinin Çözüm Metotları 351
Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Lineer Normal Denklem Sistemlerinin Çözümü 362
Lineer Diferensiyel Operatörler ve Operatör Metodu 374
Standart Lineer Denklem Sistemleri 381
Matrisler ve Lineer Denklem Sistemleri 400
Lineer Denklem Sistemleri 400
Lineer Homojen Normal Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Özdeğerleri, Özvektörleri ve Çözümü 410
Farklı Özdeğerler 416
Katlı Özdeğerler 424
Özuzay ve Özbaz 465
Homojen Olmayan Normal Lineer Denklem Sistemlerinin Özdeğerleri, Özvektörleri ve Çözümü 473
Üstel Matrisler ve Lineer Denklem Sistemleri 517
Üstel Matrislere Ait Bazı Temel Özellikler 517
Sabit Katsayılı Sistemler İçin Başlangıç Değer Problemi 533
Denklem Sistemleri ve Yüksek Mertebeden Denklemler için Varlık ve Teklik Teoremleri 542

9. BÖLÜM
SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE LİNEER DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

Lineer Operatörler ve Spektral Özellikleri 551
Sınır Değer Problemleri 556
Eşlenik (adjoint) Sınır Değer Problemi 562
1) Eşlenik Diferensiyel Denklemler, Green Formülü ve Lagrange Formülü 562
2) Eşlenik Sınır Şartları 579
Özdeğer Parametreli Sınır Değer Problemleri 589
Sınır Değer Problemi ile Eşlenik Probleminin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları Arasındaki İlişkiler 596
Lineer Diferensiyel Operatörün Green Fonksiyonu 601
Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri 630

10. BÖLÜM
LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Bazı Temel Kavramlar 669
Laplace Dönüşümü ve Özellikleri 674
Ters Laplace Dönüşümü ve Özellikleri 695
Konvolusyon 699
Laplace Dönüşümünün Uygulamaları 704
Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümü 704
Dirac Delta Fonksiyonu ve Laplace Dönüşümü 718
Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri 721

Kaynaklar 727
İndeks 729

Bölüm 1
Giriş

Bu bölümde fiziksel olaylara dair matematiksel modeller, fonksiyon ve denklem kavramı, diferensiyel denklem tanımı ve diferensiyel denklemlerin çözüm tipleri, başlangıç değer problemleri, başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği ve diferensiyel denklemlerin elde edilişleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

1.1 Matematiksel Modeller

Diferensiyel denklemler, özellikle fiziksel ve doğal olayların bir matematiksel modellemesi olduğundan burada bu tip denklemlere ait bazı örnekler vereceğiz.

1) Serbest düşme hareketi. Bir cisim belli bir yükseklikten ilk hızı sıfır olacak şekilde bırakıldığında yere doğru düşen cismin bu hareketine serbest düşme hareketi denir. m kütle, v hız, a ivme, g yerçekimi ivmesi ve t zaman olmak üzere serbest düşme hareketi

$$ma = mg\ ,\ v(0) = 0$$

veya

$$a = g\ ,\ v(0) = 0$$

problemi şeklinde ifade edilir ve buradan v ile t arasında

$$v = gt$$

bağıntısı bulunur.

Buna göre matematiksel olarak

$$y' = a\ \ ,\ \ y(0) = 0\ ,\ \left(a \in \mathbb{R}\right)$$

şeklinde yazılan problemin bile basit görünümlü olmasına rağmen bir fiziksel açıklaması vardır.

2) Populasyon modeli. Bu model 1798 yılında Thomas Robert Malthus tarafından geliştirilmiş bir modeldir. $N(t)$, bir t zamanındaki nüfusu göstermek üzere bu model

$$N'(t) = kN(t), \quad N(t_0) = N_0$$

problemi ile verilir. Bu problemin çözümü

$$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$$

şeklinde elde edilir.

3) Van der Pol denklemi. Bu denklem elektrik kondansatörlerinin devreleri arasındaki elektrik akımı

$$C\frac{dV}{dt} + I = 0, \quad V = L\frac{dI}{dt} + RI$$

şeklinde modellenir. Burada V voltaj, C kondansatör kapasitesi, R rezistans ve L bobin indüktansını gösterir. Bu iki denklem arasından

$$CL\frac{d^2V}{dt^2} + RC\frac{dV}{dt} + V = 0$$

diferensiyel denklemi yazılır.

4) Maxwell denklemleri. Genel olarak Maxwell denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon}, \qquad \text{Gaus yasası, elektrik}$$

$$\nabla . H = 0, \qquad \text{Gaus yasası, manyetik}$$

$$\nabla \times E = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad \text{Faraday yasası}$$

$$\nabla \times H = J, \qquad \text{Amper yasası}$$

$$\nabla \times H = \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} + J, \qquad \text{Maxwell'in katkısı ile amper yasası.}$$

Burada

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

E elektrik alanı, H manyetik alan, ρ uzaysal yük yoğunluğu, J akım yoğunluğu, ε boş uzayın elektrik geçirgenliği ve μ boş uzayın manyetik geçirgenliğidir.

5) Navier-Stokes denklemi. Akışkanlar mekaniğinde, v akışkanın hızı, ρ yoğunluk ve p basınç olmak üzere yapışkan maddelerin akımı

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v.\nabla)v+\frac{1}{\rho}\nabla p=v\Delta v$$

şeklindeki denklemler ile ifade edilir.

6) Isı denklemi.

$$u_t-k\Delta u=0\,,\ k>0$$

denklemine ısı denklemi denir ve bu denklem difüzyon (yayınım) denklemi olarak da bilinir.

7) Dalga denklemi. Bir boyutlu homojen dalga denklemi

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0$$

ve bir boyutlu homojen olmayan dalga denklemi

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t)$$

şeklinde bir denklemdir.

8) Rodyoaktif bozunma. Bir t anında N sayıda radyoaktif çekirdek mevcutsa ve numuneye yeni bir çekirdek ilave edilmiyorsa dt zaman aralığında bozunan dN çekirdek sayısı N ile orantılıdır. Bu olaya ilişkin diferensiyel denklem

$$\frac{dN}{dt}=-kN$$

şeklinde ifade edilir. Eğer bir $t=t_0$ anında $N=N_0$ ise problem

$$\frac{dN}{dt}=-kN\,,\ N(t_0)=N_0$$

biçiminde olup bu problemin çözümü

$$\frac{dN}{N} = -kdt$$

$$\ln N = -kt + c_1$$

$$N = e^{-kt} e^{c_1}$$

$$N = ce^{-kt}$$

$$N = N_0 e^{-k(t_0 - t)}$$

şeklinde elde edilir. Eğer $N(0) = N_0$ ise bu çözüm

$$N = N_0 e^{-kt}$$

biçiminde olacaktır. Bir t zaman aralığında N çekirdek sayısı yarıya düşüyorsa bu zamana yarı ömür zamanı denir ve $t_{1/2}$ ile gösterilir. Son denklemde $N = N_0/2$ yazılırsa $t = t_{1/2}$ yarı ömür zamanı

$$t = t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

olur.

9) Newton' nun ikinci kuralı. Bir cismin ivmesi cisme etki eden kuvvetle doğru, cismin kütlesi ile ters orantılı olup bu durum

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

şeklinde ifade edilir.

10) Newton' nun evrensel çekim kuralı. Evrendeki her bir parçacık diğer bir parçacığı kütleleriyle doğru aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olan bir kuvvetle çeker. Bu durumu ifade eden bağıntı

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

ile verilir. Burada G genel yerçekimi sabitidir.

1.2 Temel Kavramlar

Bu kısımda öncelikle, fonksiyonlara ait yapılan bazı sınıflandırmaları, türev, diferensiyel, diferensiyel denklem gibi bazı temel kavramları hatırlatmak istiyoruz.

Tanım 1.1 $D \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere D nin her bir $(x_1, x_2, ..., x_n)$ elemanını $\mathbb{R}^m$ de bir tek $u = (u_1(x), u_2(x), ..., u_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ elemanına karşılık getiren bağıntıya $D \subset \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}^m$ ye bir fonksiyon denir ve

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ (n > 1, \ m > 1),$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \left(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n)\right) \\ &= u \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Bu fonksiyona n - **değişkenli** veya **çok değişkenli ve çok değerli (veya vektör değerli) fonksiyon adı** verilir. Burada,

$$f_1, f_2, ..., f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları çok değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar olup, f fonksiyonunun bileşen fonksiyonları diye adlandırılır. Bu bileşen fonksiyonları

$$u_j = f_j(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}, \ (j = 1, 2, ..., m)$$

şeklindedir. Ayrıca, D kümesi fonksiyonun tanım kümesi ve

$$\begin{aligned} f(D) = \Big\{ f(x_1, x_2, ..., x_n) \Big| (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ f = (f_1, f_2, ..., f_m) \Big\} \subset \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

kümesi de D nin **görüntü kümesidir**. f **fonksiyonunun grafiği,** fonksiyonun tanım kümesi ile değer kümesinin kartezyen çarpım kümesinde bulunan

$$\begin{aligned} f_G = \Big\{ (x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) \Big| (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ (u_1, u_2, ..., u_m) \in \mathbb{R}^m \Big\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

kümesidir.

Bu tanım göz önüne alınarak m ve n pozitif tam sayılarının alacağı değerlere göre aşağıda olduğu gibi özel fonksiyon tanımları yapılabilecektir.

a) $m = n = 1$ için

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = y$$