Çözümlü Yüksek Matematik Problemleri-2 (Analiz 3-4)

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

5. Baskı

PEGEM AKADEMİ

PEGEM AKADEMİ

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

ÇÖZÜMLÜ YÜKSEK MATEMATİK PROBLEMLERİ-2 (ANALİZ 3-4)

ISBN 978-605-318-451-5

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere http://pegem.net adresinden ulaşılabilmektedir.

1. Baskı: Mayıs 2016, Ankara
5. Baskı: Temmuz 2023, Ankara

Yayın-Proje: Ferdi Akkaya
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Kuyrukcu
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Ay-bay Kırtasiye İnşaat Gıda Pazarlama ve Ticaret Ltd. Şti.
Çetin Emeç Bulvarı 1314. Cadde No: 37A-B Çankaya/ANKARA
Tel: (0312) 472 58 55

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 46661

<u>İletişim</u>

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Önsöz

Bu kitap, üniversitelerin eğitim, fen ve mühendislik fakültelerinde okutulan Analiz III–IV ve Genel Matematik III–IV derslerine yardımcı olmak amacıyla yazılmıştır.

Kitap dokuz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde seriler, ikinci bölümde, çok değişkenli fonksiyonlar, üçüncü bölümde vektör değerli fonksiyonlar, dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerde sırasıyla iki katlı, üç katlı, eğrisel ve yüzey integralleri incelenmektedir. Son iki bölüm ise özel fonksiyonlar ve Fourier serilerini içermektedir.

Her bölüm, konu ile gerekli tanım ve teoremler verildikten sonra çok sayıda çözülmüş problemden oluşmaktadır.

Kitabın kolay okunup, anlaşılabilmesi için gerekli titizliğin gösterilmesine rağmen yine de bazı hatalar olabilir. Bu konuda her türlü uyarı ve eleştiride bulunacak meslektaş ve öğrencilere şimdiden teşekkürlerimi sunarım.

Diyarbakır 2016
Erhan PİŞKİN

Kitabımızın 2. Baskısında daha önceki baskıda gözden kaçan yazım yanlışları düzeltilmiş ve bazı problemler ilave edilmiştir. Ayrıca Laplace dönüşümü eklenmiştir. Faydalı olması dileğiyle…

Diyarbakır 2017
Erhan PİŞKİN

Kitabımızın 3. Baskısında bazı çözümlü ve çözümsüz alıştırmalar ilave edilmiştir. Faydalı olması dileğiyle…

Diyarbakır 2019
Erhan PİŞKİN

Kitabımızın yeni baskısının faydalı olması dileğiyle…

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM I

SERİLER

1.1. Seri Kavramı

Tanım. (a_n) bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

ifadesine *seri* denir. Burada a_n serinin *genel terimi*dir.

Tanım. Serinin ilk n teriminin toplamına serinin *kısmi toplamlar dizisi* denir ve

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

şeklinde gösterilir. Burada

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + ... + a_n \end{aligned}$$

dır.

Tanım. Bir serinin kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsıyor ise, yani

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

ise seriye *yakınsak seri* ve serinin toplamı s dir denir. Yakınsak olmayan seriye *ıraksak seri* denir.

Not. Serinin ilk teriminin 1 den başlama zorunluluğu yoktur.

Teorem. Yakınsak bir serinin genel teriminin limiti sıfırdır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

dır.

İspat. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

serisi yakınsak ise

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

dır. Böylece

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$$

toplamı içinde

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} s_n &= \underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n \\ &= s_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

dır. Buradan limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n-1} + a_n),$$

$$s = s + \lim_{n\to\infty} a_n$$

buradan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

bulunur.

Not. Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani genel teriminin limiti sıfır olan bir seri yakınsak olmak zorunda değildir.

Örneğin; $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ serisinin genel teriminin limiti

$$\lim_{k\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]=0$$

dır. Fakat daha sonra göreceğizki bu seri yakınsak değildir.

Buradan aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç. Eğer bir serinin genel teriminin limiti sıfır değilse bu seri ıraksaktır.

Örnek.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k},\ \sum_{k=1}^{\infty}3^{\frac{k}{k+1}},\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ \text{ve}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+4}{5k-1}$$

serilerinin genel terimlerinin limitleri sıfırdan farklı olduğundan ıraksaktırlar.

Tanım.

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=a_{n+1}+a_{n+2}+...$$

ifadesine $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ serisinin *kalan terimi* denir.

Teorem. Yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfırdır.

Çözümlü Sorular

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm. Verilen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ...$$

serisinin genel terimi

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

dır. Bu ifade basit kesirlere ayrılırsa

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

olur. Buradan serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}$$

olur. O halde verilen seri yakınsaktır ve toplamı $s = \frac{1}{2}$ dir.

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm. Verilen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + ... + \frac{n}{(n+1)!} + ...$$

serisinin genel terimi

$$a_n = \frac{n}{(n+1)!}$$

dır. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)}{(n+1).n!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

olur. Buradan serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + ... + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1$$

yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1$$

olur. O halde verilen seri yakınsaktır ve toplamı $s = 1$ dir.

3.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$$
serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm. Verilen

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} &= \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}} \\ &\quad + ... + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} + ...\end{aligned}$$

serisinin genel terimi
$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$
dır. Bu ifade önce $\sqrt{n+1}.\sqrt{n}$ parantezine alınır, sonra eşleniği ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}.\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

olur. Buradan serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = a_2 + a_3 + ... + a_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned}s_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + ... + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

yani

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

olur. O halde verilen seri yakınsaktır ve toplamı $s=\frac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

4.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm. Verilen serinin genel terimini

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \arctan\left(\frac{1}{1+k\,(k+1)}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{k+1-k}{1+k\,(k+1)}\right)\end{aligned}$$

olarak yazalım. Buradan $\tan\alpha=k+1$ ve $\tan\theta=k$ alınırsa

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{k+1-k}{1+k\,(k+1)}\right) &= \arctan\left(\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}\right)\\ &= \arctan\left[\tan\left(\alpha-\theta\right)\right]\\ &= \alpha-\theta\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\tan\alpha=k+1\Rightarrow\alpha=\arctan\left(k+1\right)$$

ve

$$\tan\theta=k\Rightarrow\theta=\arctan k$$