

Çözümlü Yüksek Matematik Problemleri-2 (Analiz 3-4)

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

5. Baskı





Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

ÇÖZÜMLÜ YÜKSEK MATEMATİK PROBLEMLERİ-2 (ANALİZ 3-4)

ISBN 978-605-318-451-5

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2023, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevidir**. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanıyan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

1. Baskı: Mayıs 2016, Ankara
5. Baskı: Temmuz 2023, Ankara

Yayın-Proje: Ferdi Akkaya
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Kuyrukcu
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Ay-bay Kırtasiye İnşaat Gıda Pazarlama ve Ticaret Ltd. Şti.
Çetin Emeç Bulvarı 1314. Cadde No: 37A-B Çankaya/ANKARA
Tel: (0312) 472 58 55

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 46661

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Önsöz

Bu kitap, üniversitelerin eğitim, fen ve mühendislik fakültelerinde okutulan Analiz III–IV ve Genel Matematik III–IV derslerine yardımcı olmak amacıyla yazılmıştır.

Kitap dokuz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde seriler, ikinci bölümde, çok değişkenli fonksiyonlar, üçüncü bölümde vektör değerli fonksiyonlar, dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerde sırasıyla iki katlı, üç katlı, eğrisel ve yüzey integralleri incelenmektedir. Son iki bölüm ise özel fonksiyonlar ve Fourier serilerini içermektedir.

Her bölüm, konu ile gerekli tanım ve teoremler verildikten sonra çok sayıda çözülmüş problemden oluşmaktadır.

Kitabın kolay okunup, anlaşılabilmesi için gerekli titizliğin gösterilmesine rağmen yine de bazı hatalar olabilir. Bu konuda her türlü uyarı ve eleştiride bulunacak meslektaş ve öğrencilere şimdiden teşekkürlerimi sunarım.

Diyarbakır 2016
Erhan PİŞKİN

Kitabımızın 2. Baskısında daha önceki baskıda gözden kaçan yazım yanlışları düzeltilmiş ve bazı problemler ilave edilmiştir. Ayrıca Laplace dönüşümü eklenmiştir. Faydalı olması dileğiyle...

Diyarbakır 2017
Erhan PİŞKİN

Kitabımızın 3. Baskısında bazı çözümlü ve çözümsüz alıştırmalar ilave edilmiştir. Faydalı olması dileğiyle...

Diyarbakır 2019
Erhan PİŞKİN

Kitabımızın yeni baskısının faydalı olması dileğiyle...

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
1. SERİLER.....	1
1.1. Seri Kavramı.....	1
1.2. Geometrik Seri.....	16
1.3. Pozitif Terimli Seriler için Yakınsaklık Testleri.....	24
1.4. Alterne Seriler.....	49
1.5. Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık.....	50
1.6. Kuvvet Serileri.....	51
1.7. Kuvvet Serilerinin Türev ve İntegrali.....	61
1.8. Taylor Serileri.....	63
1.9. Binom Serisi.....	77
2. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR.....	81
2.1. Giriş.....	81
2.2. Fonksiyonların Grafikleri.....	85
2.3. Limit ve Süreklilik.....	87
2.4. Kısmi Türevler.....	100
2.4.1. Yüksek Mertebeden Kısmi Türevler.....	103
2.5. Kapalı Fonksiyonun Türevi.....	105
2.6. Zincir Kuralı.....	117
2.7. Yönlü Türevler.....	123
2.8. Tam Diferansiyel.....	130

2.8.1.	Lineer Yaklaşımlar (Lineerleştirme).....	131
2.8.2.	Yaklaşık Değer.....	132
2.9.	İki Değişkenli Fonksiyonlar için Taylor Açılımı.....	137
2.10.	Maksimum ve Minimumlar.....	140
2.10.1.	Lagrange Çarpanlar Yöntemi.....	143
2.11.	İntegral İşareti Altında Türev Alma.....	158
2.12.	Bölge Dönüşümleri.....	160
2.13.	Fonksiyonel Bağımlılık.....	162
2.14.	Skaler ve Vektör Alanları.....	163
2.14.1.	Teğet Düzlem.....	165
3.	VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR...	179
3.1.	Temel Tanımlar.....	179
3.2.	Limit ve Süreklilik.....	184
3.3.	Türev.....	188
3.4.	İntegral.....	194
3.5.	Eğrinin Uzunluğu.....	197
3.6.	Teğet, Normal ve Binormal Vektörler.....	201
4.	İKİ KATLI İNTEGRALLER.....	207
4.1.	Temel Tanımlar.....	207
4.2.	İki Katlı İntegrallerde Bölge Dönüşümleri.....	236
4.3.	İki Katlı İntegralin Uygulamaları.....	250
4.3.1.	Alan Hesabı.....	250

4.3.2.	Hacim Hesabı.....	255
4.3.3.	Kütle Hesabı.....	259
4.3.4.	Ağırlık Merkezi.....	260
4.3.5.	Yüzey Alanlarının Hesabı.....	263
4.3.6.	Eylemsizlik Momenti.....	266
5.	ÜÇ KATLI İNTEGRALLER.....	269
5.1.	Temel Tanımlar.....	269
5.2.	Üç Katlı İntegrallerde Bölge Dönüşümleri.....	275
5.3.	Üç Katlı İntegrallerin Uygulamaları.....	284
5.3.1.	Hacim Hesabı.....	284
5.3.2.	Kütle Hesabı.....	288
6.	EĞRİSEL İNTEGRALLER.....	291
6.1.	Birinci Çeşit Eğrisel İntegraller.....	291
6.2.	İkinci Çeşit Eğrisel İntegraller.....	298
6.3.	Eğrisel İntegralin Temel Teoremleri.....	301
6.4.	Eğrisel İntegralin Uygulamaları.....	307
6.4.1.	Alan Hesabı.....	307
6.4.2.	Yay Uzunluğu Hesabı.....	308
6.4.3.	Kütle Hesabı.....	309
6.4.4.	Ağırlık Merkezi Hesabı.....	310
6.4.5.	Eylemsizlik Momenti Hesabı.....	312
6.4.6.	İş Hesabı.....	313

7.	YÜZEY İNTEGRALLERİ.....	315
7.1.	Birinci Çeşit Yüzey İntegralleri.....	315
7.2.	İkinci Çeşit Yüzey İntegralleri.....	317
7.3.	Yüzey İntegrallerinin Temel Teoremleri.....	320
8.	ÖZEL FONKSİYONLAR.....	323
8.1.	Gamma Fonksiyonu.....	323
8.2.	Beta Fonksiyonu.....	325
8.3.	Kesirli Türeve Giriş.....	339
9.	FOURİER SERİLERİ.....	347
9.1.	Giriş.....	347
9.2.	2π Periyotlu Bir Fonksiyonun Fourier Serisi...	348
9.3.	Tek ve Çift Fonksiyonların Fourier Serileri.....	354
9.4.	Keyfi Aralıkta Verilen Fonksiyonun Fourier Serisi.....	358
9.5.	Kompleks Fourier Serisi.....	361
9.6.	Parseval Özdeşliği.....	364
10.	LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE UYGULAMALARI.....	377
10.1.	Laplace ve Ters Laplace Dönüşümü.....	377
10.2.	Laplace Dönüşümünün Diferansiyel Denklemlere Uygulanması.....	391
Ek	TEMEL FORMÜLLER.....	405

KAYNAKLAR.....	409
DİZİN.....	410

BÖLÜM I

SERİLER

1.1. Seri Kavramı

Tanım. (a_n) bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

ifadesine *seri* denir. Burada a_n serinin *genel terimidir*.

Tanım. Serinin ilk n teriminin toplamına serinin *kısmi toplamlar dizisi* denir ve

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

şeklinde gösterilir. Burada

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

dır.

Tanım. Bir serinin kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsıyor ise, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

ise seriye *yakınsak seri* ve serinin toplamı s dir denir. Yakınsak olmayan seriye *ıraksak seri* denir.

Not. Serinin ilk teriminin 1 den başlama zorunluluğu yoktur.

Teorem. Yakınsak bir serinin genel teriminin limiti sıfırdır. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

dır.

İspat. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

serisi yakınsak ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

dır. Böylece

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

toplamı içinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} s_n &= \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n \\ &= s_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

dır. Buradan limit almırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n-1} + a_n),$$

$$s = s + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

bulunur.

Not. Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani genel teriminin limiti sıfır olan bir seri yakınsak olmak zorunda değildir.

Örneğin; $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ serisinin genel teriminin limiti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] = 0$$

dır. Fakat daha sonra göreceğimiz bu seri yakınsak değildir.

Buradan aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç. Eğer bir serinin genel teriminin limiti sıfır değilse bu seri iraksaktır.

Örnek.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k}, \sum_{k=1}^{\infty} 3^{\frac{k}{k+1}}, \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+4}{5k-1}$$

serilerinin genel terimlerinin limitleri sıfırdan farklı olduğundan iraksaktırlar.

Tanım.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

ifadesine $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin *kalan terimi* denir.

Teorem. Yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfırdır.

Çözümlü Sorular

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm. Verilen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

serisinin genel terimi

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

dır. Bu ifade basit kesirlere ayrılırsa

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

olur. Buradan serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}$$

olur. O halde verilen seri yakınsaktır ve toplamı $s = \frac{1}{2}$ dir.

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm. Verilen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$$

serisinin genel terimi

$$a_n = \frac{n}{(n+1)!}$$

dır. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1) - 1}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)}{(n+1) \cdot n!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

olur. Buradan serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1$$

yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1$$

olur. O halde verilen seri yakınsaktır ve toplamı $s = 1$ dir.

3.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm. Verilen

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} &= \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4} + 4\sqrt{3}} \\ &+ \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} + \dots \end{aligned}$$

serisinin genel terimi

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

dır. Bu ifade önce $\sqrt{n+1}\sqrt{n}$ parantezine alınır, sonra eşleniği ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \cdot \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

olur. Buradan serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

yani

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olur. O halde verilen seri yakınsaktır ve toplamı $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

4.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \arctan \left(\frac{1}{k^2 + k + 1} \right)$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm. Verilen serinin genel terimini

$$\begin{aligned}\arctan \left(\frac{1}{k^2 + k + 1} \right) &= \arctan \left(\frac{1}{1 + k(k+1)} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{k+1-k}{1 + k(k+1)} \right)\end{aligned}$$

olarak yazalım. Buradan $\tan \alpha = k+1$ ve $\tan \theta = k$ alınırsa

$$\begin{aligned}\arctan \left(\frac{k+1-k}{1 + k(k+1)} \right) &= \arctan \left(\frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta} \right) \\ &= \arctan [\tan (\alpha - \theta)] \\ &= \alpha - \theta\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\tan \alpha = k+1 \Rightarrow \alpha = \arctan (k+1)$$

ve

$$\tan \theta = k \Rightarrow \theta = \arctan k$$