Temel Matematiksel Kavramlar ve Uygulamaları

- Öğrenenler ve Öğretenler İçin -

Editörler:
Yrd. Doç. Dr. Aysun Nüket ELÇİ
Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL
Doç. Dr. Berna CANTÜRK GÜNHAN
Yrd. Doç. Dr. Emre EV ÇİMEN

PEGEM AKADEMİ

PEGEM AKADEMİ

Editörler: Yrd. Doç. Dr. Aysun Nüket ELÇİ, Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL
Doç. Dr. Berna CANTÜRK GÜNHAN, Yrd. Doç. Dr. Emre EV ÇİMEN

TEMEL MATEMATİKSEL KAVRAMLAR VE UYGULAMALARI
Öğrenenler ve Öğretenler İçin

ISBN 978-605-318-755-4
DOI 10.14527/9786053187554

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

1. Baskı: Aralık 2016, Ankara

Yayın-Proje: Özge Işıkcı
Dizgi-Grafik Tasarım: Ayşe Nur Yıldırım
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Vadi Grup Ciltevi A.Ş.
İvedik Organize Sanayi 28. Cadde 2284 Sokak No:105
Yenimahalle/ANKARA
(0312 394 55 91)

Yayıncı Sertifika No: 14749
Matbaa Sertifika No: 26687

İletişim
Karanfil 2 Sokak No: 45 Kızılay / ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50 - 430 67 51
Yayınevi Belgeç: 0312 435 44 60
Dağıtım: 0312 434 54 24 - 434 54 08
Dağıtım Belgeç: 0312 431 37 38
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net

ÖN SÖZ

"Temel Matematiksel Kavramlar ve Uygulamaları" başlıklı kitap, alanında uzman birçok matematik eğitimcisinin katkıları ile hazırlanmış ortak bir eserdir. Elli bölümden oluşan bu eserin ortaya çıkmasında yirmi iki üniversiteden kırk beş öğretim elemanı ve on matematik öğretmeni katkıda bulundu. Kitapta matematiksel kavramlar kritik noktaları, tarihsel gelişimleri, kullanım alanları, ilişkili olduğu kavramlar ve uygulamaları açısından ele alındı. Matematiğin temel kavramlarının ve uygulamalarının ele alındığı bu kitabın matematiği öğrenen ve öğretenlerin temel matematiksel bilgileri öğrenmelerini ve matematiksel kavramların nasıl ortaya çıktığını anlamalarını sağlamak ve matematik ile ilgili merak edilen konulara açıklık getirmek amacıyla önemli bir kaynak olması beklenmektedir. Kitapta bazı kavramlar bir bölümde ele alınırken daha geniş kapsamlı kavramlar ayrı bölümlerde ele alındı.

Ortaya çıkan bu eser, kavramların tarihsel gelişimine yönelik bilgilerin, çözümlü örneklerin, açık uçlu soruların, çoktan seçmeli testlerin, proje konularının ve gerekli bazı uyarıların geniş kapsamlı ele alınış biçimiyle kavramsal bilgilerini ve öğretim uygulamalarını geliştirmek isteyen ilkokulda görev yapan sınıf öğretmenlerinin, ortaokul ve lise düzeyinde görev yapan matematik öğretmenlerinin yararına sunulmuştur. Kitap öğretmen adaylarının lisans derslerinde kullanabilmeleri için YÖK ders içerikleriyle örtüşecek şekilde hazırlanmıştır. Ek olarak, kitabın öğretmenlik mesleğine geçişte gerçekleştirilen sınavlarda da yardımcı bir kaynak olarak kullanılması önerilmektedir. Başta Eğitim Fakültelerinde öğrenim gören matematik öğretmeni adayları, fen bilgisi öğretmeni adayları ve sınıf öğretmeni adayları olmak üzere matematik dersleri alan tüm lisans öğrencileri temel matematiksel kavramları ve uygulamalarının örneklerini tek bir kaynakta bir arada bulabilirler. Lise müfredatında yer alan konulara ilişkin farklı bir bakış açısı kazanmak isteyen öğrenciler de bu kitaptan yararlanabilirler. Diğer yandan kitap, matematiksel kavramlar ve öğretimi üzerine çalışmalar gerçekleştirecek matematik eğitimi araştırmacılarına katkı sağlayabilecektir.

Kitabın ortaya çıkmasında öncelikle özverili çalışmalarıyla emek veren bölüm yazarlarına ve dizgi aşamasındaki yoğun çalışmalarından dolayı Pegem Akademi Yayınevi çalışanlarına teşekkürlerimizi sunarız. Kitabın matematik eğitimi ile ilgilenen tüm okuyuculara ve alanyazına faydalı olmasını temenni ederiz.

Aralık 2016

Yrd. Doç. Dr. Aysun Nüket ELÇİ

Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL

Doç. Dr. Berna CANTÜRK GÜNHAN

Yrd. Doç. Dr. Emre EV ÇİMEN

BÖLÜMLER VE YAZARLARI

İÇİNDEKİLER

KÜMELER

I

Doç. Dr. Serkan NARLI
Dokuz Eylül Üniversitesi

"Kümeler teorisini kazandırarak Cantor'un bize sunduğu cennetten bizi kimse kovamaz!"
Hilbert

Kazanımlar
Küme kavramını örnekler ile açıklar.
Kümenin temel kavramlarını belirler.
Sonlu küme, sonsuz küme kavramlarını örnekler ile açıklayabilir.
Küme üzerinde yapılan işlemleri anlar.
Küme işlemleri kullanarak problem çözebilir.

1. KÜMELER

1.1 Küme Kavramı ve Elemanlar

Kümeler sadece matematikte değil gündelik yaşantımızda da önemli bir yer tutmaktadır. Kitapların kümesi, insanların kümesi, renklerin kümesi örneklerinde olduğu gibi birçok durumda kümelerden bahsedilmektedir. Sözlük anlamına göre küme; benzer özelliklere sahip nesnelerin bir araya gelerek oluşturdukları topluluktur. Bununla birlikte matematikte küme, sezgisel olarak bilinen ***tanımsız***, temel kavramlardan biri olarak kabul edilir (Güney, 1993). Ayrıca adına küme denilmeden başka matematikçiler tarafından örtülü şekilde kullanılsa da bu kavramın matematiğe Georg Cantor ile girdiği söylenir. Cantor, kümeler kuramının temellerini ortaya koymuştur. Böylece matematikte yepyeni ufuklar açılıp bu kavram, matematiğin her alanında kullanılmaya başlanmıştır. Dahası küme kavramı, matematikte "Modern matematik" ve "Klasik matematik" sınıflamasına yol açmıştır (Özer, 1998). Klasik matematik daha çok aritmetik ağırlıklı, cebirsel işlemlerin yürütülerek problemlerin çözüldüğü ve Euclid'in tanımladığı geometrik nesnelerin üzerine kurulan geometrinin ele alındığı matematik türüdür. Modern matematik ise küme ve grup kavramlarını kullanarak matematiksel yapıları yeniden tanımlamaktadır. Örneğin, modern matematikte doğru noktalar kümesi, çember ise bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların kümesidir, yansıma dönüşümü ise bir grup yapısına sahiptir.

Böylesine önemli değişikliklere yol açan kümelerde, yukarıda belirttiğimiz sözlük anlamına bakılırsa elemanlar rastgele seçilemezler. Oysa Cantor'un ortaya koyduğu küme teorisinde ise bir topluluğun küme olabilmesi için o topluluğun ortak özelliğe sahip olması gerekmemekte sadece kümenin elemanlarının kesin olarak belirlenebilmesi istenmektedir. Bu da kümenin iyi tanımlılığı olarak bilinmektedir. Küme, bir bütün olarak ele alınabilen iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur. Örneğin tek sayılardan oluşan topluluk bir küme belirtir. Çünkü bir nesne ya tek sayıdır ya da değildir. Bunun gibi "yeryüzünde yaşayan insanlar topluluğu", "üç rakamlı pozitif tam sayılar topluluğu" veya "e, f, k, m, 2, 5, 8 den oluşan harfler ve sayılar topluluğu" gibi topluluklar küme belirtir. Oysa "genç insanlar" ifadesi, sınırlar net çizilemeyeceği için bir küme belirtmez.

Şunu da not olarak belirtelim ki "genç insanlar" örneğinde olduğu gibi, gündelik hayatta birçok şey kesin çizgilerle ayrılamaz ve bu durum bilim adamlarını alternatif küme kavramları ile uğraşmaya zorlamıştır. Lesniewski'nin (1915) mereology isimli teorisi, Vopenka'ın (1970) alternatif küme teorisi, Apostoli ve Kanada'nın (1999) penumbral küme teorisi, soft küme teorisi, sezgisel küme teorisi, Pawlak'ın (1982) kaba (rough set) kümeleri ve belki bu kümelerin en ünlüsü Zadeh'in (1965) Bulanık Küme Teorisi (Fuzzy Sets) bu teorilere örnek gösterilebilir (Pawlak, 1997). Bu bölümde ise Cantor'un fikir babalığını yaptığı bilinen küme teorisi ve bu teori ile ilgili temel kavramlar tartışılacaktır.

Kümeler genelde A, B, C, … gibi büyük harflerle gösterilirler. Ayrıca kümeyi oluşturan nesnelere kümenin elemanları denir. x, bir A kümesinin elemanı ise bu durum "$x \in A$" ile değilse "$x \notin A$" ile gösterilir.

1.1.1 Kümelerin Gösterim Şekilleri

Herhangi bir A kümesi, elemanları { } sembolü içinde aralarına virgül konarak yazıldığında ***liste yöntemi*** ile, kapalı bir eğri içinde elemanlarının başına bir nokta konarak yazıldığında ***Venn Şeması*** ile ve { } sembolü içinde elemanlarının tümünü içeren ortak bir özelliğe göre yazıldığında, A={x | x elemanı p özelliğine sahiptir} veya A={x : x elemanı p özelliğine sahiptir} gibi, ***ortak özellik yöntemin***e göre yazılmış olur (MEB, 2012, s.36). Tabiî ki kimi kümeler bu yöntemlerin üçü ile de gösterilebilirken, bazıları gösterilemezler.

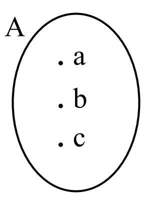
Örneğin elemanları a, b ve c olan bir A kümesini düşünelim. Bu küme liste yöntemi ile;

A={a, b, c}

ortak özellik yöntemine göre;

A={x | x, Türk alfabesinin ilk üç harfinden biri}

ve Venn Şeması ile de



şeklinde gösterilebilir:

Yeryüzünde yaşayan canlılardan oluşacak kümeyi düşünelim. Bu küme, ortak özellik yöntemi ile B={x | x, yeryüzünde yaşayan canlılardan biridir} şeklinde belirtilebilir. Oysa bu kümenin liste yöntemi ile ve Venn şeması ile gösterimi pek mümkün görülmemektedir.

! Uyarı

Küme gösterimlerinde herhangi bir eleman iki kere yazılmaz ve yazılış sırası küme için önemli değildir. Örneğin MİSSİSSİPPİ kelimesinin harflerinden oluşacak kümeyi ele alacak olursak, bu küme {m, i, s, s, i, s, s, i, p, p, i} şeklinde yazılmaz! Bu küme {m, i, s, p} şeklinde yazılmalıdır. Ve de elemanların yazılış sırası önemli olmadığından {i, p, m, s} veya {m, p, i, s} kümeleri de bu küme ile aynı kümeyi belirtir.

Tanım. Bir A kümesinin elaman sayısı s(A) ile gösterilebilir. Eleman sayısı sonlu olan kümeye ***sonlu küme***, sonlu tane elemandan oluşmayan kümeye de ***sonsuz küme*** denir. Örneğin

{a, b, c}

{1, 2, 3, …, 99999999999998, 99999999999999}

kümeleri sonlu iken

IN={0, 1, 2, …} doğal sayılar kümesi

IP={x : x, bir asal sayı} asal sayılar[1] kümesi

ise sonsuz kümelerdir.

Örnek: Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını belirleyiniz.

A={1, 2, {3,4}}

B={{{5}, 6}}, 7}

C={{{{5}, 6}}, 7}}

D={x: x bir reel sayıdır}

Çözüm: A kümesinin üç elemanı vardır. $1 \in A$, $2 \in A$ ve $\{3,4\} \in A$ dır. Dolayısıyla s(A)=3 tür. B kümesi ise iki elemandan oluşmaktadır. $\{\{5\}, 6\}\} \in B$ ve $7 \in B$ dir. Yani s(B)=2 dir. Dikkatli bakılırsa C kümesinin de tek elemandan oluştuğu görülebilir. $\{\{\{5\}, 6\}\}, 7\} \in C$ ve s(C)=1 dir. D kümesi de IR reel sayılar kümesine eşit olacağından sonsuz elemanlıdır.

? Sizce Evrendeki tüm yıldızların kümesi sonsuz mudur?

1.2 Boş Küme ve Evrensel Küme

Bazen bir küme için tanımlanan özelliği sağlayan hiçbir eleman bulunmayabilir. "Negatif doğal sayılar kümesi" veya "karesi sıfırdan küçük reel sayılar kümesi" gibi. Bu tür durumları karşılamak üzere matematikte boş küme tanımlanmıştır. Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme, $\varnothing$ veya { } sembolü ile gösterilmektedir. Ayrıca boş küme $\varnothing=\{x: x \neq x\}=\{x: p(x) \vee p^{/}(x)\}$ şeklinde de yazılabilmektedir. $s(\varnothing)= 0$ dır.

Boş kümenin tümleyeni olarak düşünebileceğimiz bir kavram ise evrensel küme kavramıdır. Çalıştığımız alan ile ilgili yazabileceğimiz en geniş kümeye ***evrensel küme*** denir. Evrensel küme $E=\{x: x=x\}=\{x: p(x) \vee p^{/}(x)\}$ şeklinde gösterilebilir. Bu tanımdan anlaşılacağı üzere birden fazla evrensel küme tanımlanabilir. Çalıştığımız alana göre, iki elemanlı bir küme evrensel küme olabilirken, örneğin ikilik tabanda çalıştığımız bir alanda rakamlar için evrensel kümemiz 0 ve 1 den oluşur, başka bir alanda IN doğal sayılar kümesi veya IR reel sayılar kümesi evrensel küme olarak seçilebilir[2].

1.3 Alt Küme

Kümelerde önemli kavramlardan biri de alt küme kavramıdır. A ve B iki küme olmak üzere A kümesinin her elemanı B kümesine de ait oluyorsa A kümesi B kümesinin ***alt kümesidir*** yada A kümesi B kümesi tarafından kapsanır; veya B kümesi A kümesinin üst kümesidir ya da B kümesi A kümesini kapsar denir ve $A \subset B$ veya $B \supset A$ şeklinde gösterilir.

1 Asal sayıların sonsuzluğunu Euclid, M.Ö. 300 yılı dolaylarında yazdığı "Elements" adlı kitabında yer alan ispat ile göstermiştir.

2 Herşeyi eleman kabul eden bir evrensel kümenin varlığını düşünmek Russell Paradoksu adı verilen bir paradoksa neden olmaktadır (MD, 2003, Güney, 1993).

Alt küme olma kavramı matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

"$x \in A$ *iken* $x \in B \Leftrightarrow A \subset B$"

Peki kaç tane alt küme yazılabilir. Aşağıdaki tabloyu düşünelim:

Tablo1. 1-4 Elemanlı Kümelerin Alt Kümeleri

Kümeler	Alt Kümeler	Eleman Sayısı	Alt Kümenin Eleman Sayısı
∅	∅	1	1
{a}	∅, {a}	1	2
{a,b}	∅, {a}, {b}, {a,b}	2	4
{a,b,c}	∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}	3	8
{a,b,c,d}	∅, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, {a,b,c,d}	4	16

Alt küme sayısının, kümenin eleman sayısına bağlı olarak 2 nin kuvvetleri şeklinde arttığı görülebilir. Tabloya bakılırsa,

sıfır elemanlı boş kümenin $2^0 = 1$ tane,
bir elemanlı {a} kümesinin $2^1 = 2$ tane,
iki elemanlı {a,b} kümesinin $2^2 = 4$ tane,
üç elemanlı {a,b,c} kümesinin $2^3 = 8$ tane ve
dört elemanlı {a,b,c,d} kümesinin $2^4 = 16$ tane alt kümesinin olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum bir rastlantı değil, binom açılımı veya saymanın temel ilkesi ile kanıtlanabileceği üzere bütün kümeler için geçerli olan bir kuraldır. s(A)=n ise A kümesinin $\boldsymbol{2^n}$ tane alt kümesi vardır.

Alt küme tanımı ışığında şu ifadelerin de geçerli olacağı görülebilir:

"Boş küme her kümenin alt kümesidir ($\varnothing \subset X$)".
"Her küme kendisinin alt kümesidir ($X \subset X$)".
"Her küme evrensel kümenin alt kümesidir ($X \subset E$)".

Görüleceği üzere her küme kendisinin alt kümesidir. Kümenin kendisi haricindeki diğer alt kümelerine ise ***öz alt küme*** denir. Dolayısıyla n elemanlı bir A kümesinin $\boldsymbol{2^n - 1}$ tane öz alt kümesinin olacağı açıktır.

Örnek: Alt küme sayısının 13 fazlası, özalt küme sayısının 3 katına eşit olan kümenin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm: İlgili küme A ve eleman sayısı s(A)=n olsun. Bu durumda

$2^n+13=3.(2^n-1)$
$2^n+13=3.2^n-3$
$2.2^n = 16$
$2^n = 8 = 2^3$
$n = 3$

bulunur. s(A) = 3 olur.

Ayrıca alt küme ile ilgili bir başka kavram ise kuvvet kümesi kavramıdır. Bir A kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan aileye[3] A kümesinin ***kuvvet kümesi*** denir. Kuvvet kümesi, $\wp(A)$ veya 2^A ile gösterilebilir. s(A) = n ise tüm alt kümelerin ailesi olduğu için kuvvet kümesinin eleman sayısı $s(\wp(A)) = 2^n$ dir.

Örneğin A={a} ise kuvvet kümesi $\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$ veya B = {a,b,c} ise kuvvet kümesi P(B)= {∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}} dir.

Alt küme konusunda ilgilenilen bir başka konu da herhangi bir eleman sayısına sahip alt küme sayısıdır. Bunun için aşağıdaki çizelgeye bir göz atalım:

Tablo2. 4 Elemanlı Kümenin 0-4 Elemanlı Alt Küme Sayıları

Küme	Alt kümeler		Alt küme Sayısı
A={1,2,3,4}	0 elemanlı	∅	1
	1 elemanlı	{1}, {2}, {3}, {4}	4
	2 elemanlı	{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}	6
	3 elemanlı	{1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, { 2,3,4}	4
	4 elemanlı	{1,2,3,4}	1

Görüldüğü üzere 4 elemanlı A kümesinin sıfır elemanlı 1 tane, bir elemanlı 4 tane, iki elemanlı 6 tane ve dört elemanlı 1 tane alt kümesi bulunmaktadır. Dikkatli incelenirse bu alt küme sayıları, kombinasyon ile ilişkilendirilebilir. Genel olarak;

n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı alt küme sayısı

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \text{ dir.}$$

Örneğin yukarıda s(A)=4 tür. Bu kümenin;

sıfır elemanlı alt küme sayısı $\binom{4}{0} = \frac{4!}{(4)! \cdot 0!} = 1;$

bir elemanlı alt küme sayısı $\binom{4}{1} = \frac{4!}{(3)! \cdot 1!} = 4;$

iki elemanlı alt küme sayısı $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(2)! \cdot 2!} = 6;$

üç elemanlı alt küme sayısı $\binom{4}{3} = \frac{4!}{(1)! \cdot 3!} = 4$ ve

dört elemanlı alt küme sayısı $\binom{4}{4} = \frac{4!}{(0)! \cdot 4!} = 1$ dir.

3 Elemanları küme olan kümelere, küme ailesi denir

Bu konu ile ilgili aşağıdaki örnekleri inceleyelim:

Örnek: A = {a,b,c,d,e,f,g,h} kümesinin

1) Alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunmaz?

2) Alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunur?

3) Alt kümelerinin kaç tanesinde a ve b elemanlarının ikisi birden bulunur?

4) Alt kümelerinin kaç tanesinde a ve b elemanlarının ikisi birden bulunmaz?

5) Alt kümelerinin kaç tanesinde a veya b elemanı bulunur?

6) Alt kümelerinin kaç tanesinde a veya b elemanı bulunur?

7) Alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunur ama b elemanı bulunmaz?

8) 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunmaz?

9) 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunur?

10) 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a ve b elemanları bulunur?

11) 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a ve b elemanları bulunmaz?

12) 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a veya b elemanı bulunmaz?

13) 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a veya b elemanı bulunur?

14) 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a elemanı bulunurken b elemanı bulunmaz?

Çözüm:

1) A kümesinden a elemanı çıkarılırsa 7 elemanlı {b,c,d,e,f,g,h} kümesi elde edilir. Bu kümenin kaç tane alt kümesi varsa o kadar A kümesinin a elemanını içermeyen alt kümesi olacaktır. Dolayısıyla bu sayı 2^7=128 dir.

2) A kümesinin tüm alt kümelerinin sayısı 2^8 = 256 dır. a elemanını içermeyen alt kümelerinin sayısı ise 2^7 = 128 idi. Bu yüzden a elemanını içeren alt kümelerinin sayısı $2^8–2^7$=128 dir. Bir başka yöntem olarak şu düşünülebilir. 7 elemanlı {b,c,d,e,f,g,h} kümesinin 2^7=128 tane alt kümesinin her birine a elemanı eklenirse, A kümesinin a elemanını içeren alt kümeleri elde edilmiş olur. Sonuçta, A kümesinin a elemanını içeren alt kümeleri sayısı 128 dir.

3) A kümesinden a ve b çıkarılırsa, {c,d,e,f,g,h} kümesi elde edilir. Bu elde edilen kümenin 2^6=64 tane alt kümesi vardır. Bu alt kümelerin her birine a ve b elemanları birlikte eklenirse, A kümesinin 2^6=64 tane alt kümesinde a ve b elemanlarının ikisi birden bulunur.

4) A kümesinin tüm alt kümeleri sayısından a ve b nin bulunduğu alt küme sayısını çıkarırsak 2^8-2^6=256-64=192 tane alt kümede a ve b birlikte eleman olarak bulunmaz.

5) "a veya b elemanı bulunmaz" demekle yalnız a elemanı bulunmadığı ve yalnız b elemanının bulunmadığı ve ikisinin birden bulunmadığı durumlar kastedilmektedir. A kümesinden a ve b çıkarılırsa, {c,d,e,f,g,h} kümesi elde edilir. Bu elde edilen kümenin 2^6=64 tane alt kümesi vardır. Dolayısıyla A kümesinin 64 tane alt kümesinde a veya b elemanları bulunmaz.

6) "a veya b elemanı bulunur" demek a elemanı bulunur veya b elemanı bulunur veya ikisi birden bulunur demektir. Bu yüzden tüm alt küme sayısından a veya b nin bulunmadığı alt küme sayısını çıkarmak yeterli olacaktır. Sonuçta 256–64=192 tane alt kümede a veya b elamanı bulunur.

7) A kümesinden a ve b elemanları çıkarılırsa {c,d,e,f,g,h} kümesi elde edilir. Bu elde edilen kümenin 2^6=64 tane alt kümesi vardır. Bu alt kümelerin her birine a elemanı eklenerek elde edilecek alt kümelerde a elemanı vardır ama bu alt kümeler b elemanını içermez. Dolayısıyla A kümesinin 64 tane alt kümesinde a elemanı bulunur ama b elemanı bulunmaz.

8) A kümesinden a elemanı çıkarılırsa 7 elemanlı {b,c,d,e,f,g,h} kümesi elde edilir. Bu kümenin C(7,4) = 35 tane 4 elemanlı alt kümesi vardır. Dolayısıyla A kümesinin 35 tane a elemanını içermeyen 4 elemanlı alt kümesi vardır.

9) A kümesinin tüm 4 elemanlı alt kümelerinin sayısından a elemanını içermeyen 4 elemanlı alt kümeleri sayısını çıkarırsak, a elemanını içeren 4 elemanlı alt kümeleri sayısını bulabiliriz. Bu da C(8,4)-C(7,3)=70-35=35 tanedir. İkinci yol olarak şu da düşünülebilir: 7 elemanlı {b,c,d,e,f,g,h} kümesinin C(7,3)=35 tane 3 elemanlı alt kümesi vardır. Bu alt kümelere a elemanı eklenirse A kümesinin a elemanını içeren 4 elemanlı alt kümelerini buluruz. Sonuç olarak A kümesinin a elemanını içeren 35 tane 4 elemanlı alt kümesi vardır.

10) A kümesinden a ve b çıkarılırsa, {c,d,e,f,g,h} kümesi elde edilir. Bu kümenin C(6,2)=15 tane 2 elemanlı alt kümesi vardır. Bu alt kümelere a ve b elemanları birlikte eklenirse, A kümesinin 15 tane a ve b elemanlarını birlikte içeren alt kümesi elde edilir.

11) A kümesinin 4 elemanlı tüm alt kümeleri sayısından a ve b nin bulunduğu 4 elemanlı alt küme sayısını çıkarırsak, 70-15=55 tane a ve b nin bulunmadığı 4 elemanlı alt kümesinin olduğu görülür.

12) "a veya b elemanı bulunmaz" demekle yalnız a elemanının bulunmadığı ve yalnız b elemanının bulunmadığı ve ikisinin birden bulunmadığı 4 elemanlı alt kümeler kastedilmektedir. A kümesinden a ve b çıkarılırsa, {c,d,e,f,g,h} kümesi elde edilir. Bu kümenin C(6,4)=15 tane 4 elemanlı alt kümesi vardır. Bu alt kümeler a veya b elemanını içermezler. Sonuç 15 dir.

13) "a veya b elemanı bulunur" demek a elemanı bulunur veya b elemanı bulunur veya ikisi birden bulunur demektir. Bu yüzden dört elemanlı tüm alt küme sayısından a veya b nin bulunmadığı alt küme sayısı çıkarılmalıdır. Dolayısıyla 70-15=55 tane a veya b elemanının bulunduğu alt küme vardır.

14) A kümesinden a ve b elemanları çıkarılırsa {c,d,e,f,g,h} kümesi elde edilir. Bu elde edilen kümenin C(6,3)=20 tane 3 elemanlı alt kümesi vardır. Bu alt kümelerin her birine a elemanı eklenerek elde edilecek 4 elemanlı alt kümelerde a elemanı vardır ama bu alt kümeler b elemanını içermez. Dolayısıyla A kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin 20 tanesinde a elemanı bulunur ama b elemanı bulunmaz.

Örnek: A={1,2,3,4,5} kümesinin boş küme hariç tüm alt kümelerinde bulunan elemanların çarpımı kaçtır?

Çözüm: Burada 1 elemanını içeren alt küme sayısı $2^4=16$ dır. Benzer şekilde 2 elemanını da, 3 elemanını da, 4 elemanını da ve 5 elemanını da içeren alt küme sayısı $2^4=16$ dır. Dolayısıyla, tüm alt kümelerdeki elemanları çarptığımızda her elemandan $2^4=16$ tane bulunur ve çarpım sonucu $1^{16}.2^{16}.\ 3^{16}.\ 4^{16}.\ 5^{16}=(5!)^{16}$ dır.

Örnek: A={1,2,3,4,5} kümesinin boş küme hariç tüm alt kümelerinde bulunan elemanların toplamı kaçtır?

Çözüm: Tüm alt kümeler düşünüldüğünde her elemandan 16 tane olduğu için aranan toplam 16.1+16.2+16.3+16.4+16.5=16.(1+2+3+4+5)=16.15=240 olarak bulunur.

Örnek: A = {a, b, c} ve B = {a, b, c, d, e, f, g, h} olmak üzere $A \subset M \subset B$ koşuluna uyan kaç farklı M kümesi yazılabilir?

Çözüm: Bu koşulu sağlayacak M kümeleri, B kümesinin a, b ve c elemanlarını içeren alt kümeleridir. Dolayısıyla {d, e, f, g, h} kümesinin tüm alt kümelerine a, b ve c elemanlarını eklersek koşulu sağlayan M kümelerini bulabiliriz. Sonuçta {d, e, f, g, h} kümesinin $2^5=32$ tane alt kümesi vardır ve ilgili koşulu sağlayan M kümeleri 32 tanedir.

1.4 Eşit ve Denk Kümeler

Alt küme ile ilişkilendirebileceğimiz bir kavram da kümelerin eşitliğidir. Aynı elemanlardan oluşan A ve B gibi iki kümeye ***eşit iki küme*** denir ve A=B şeklinde gösterilir. Bu tanıma göre A kümesinin her elemanı B kümesinin, B kümesinin her elemanı da A kümesinin elemanı olmak durumundadır. Yani "A=B ise $A \subset B$ ve $B \subset A$" dir. Tabiî ki bu ifade "$A \subset B$ ve $B \subset A$ ise A=B" şeklinde de yazılabilir.

Eleman sayıları eşit olan A ve B gibi iki kümeye de ***denk iki küme*** denir ve A≡B ile gösterilir. Tanımlardan görülebileceği üzere eşit iki küme her zaman denktir ama denk iki küme eşit olmayabilir.

A = {-2, 2}, B={x: $x^2=4$, $x \in IR$}, C={a, b}, D={-2, 2, 4} kümelerini düşünelim. Burada A ve B kümeleri eşit dolayısıyla denk iki kümedir. C kümesi ise A, B ve D kümelerine eşit değildir ama A ve B kümelerine denktir. D kümesi de diğer kümelerin hiçbirine ne eşittir ne de denktir.

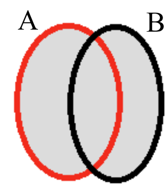
? Sizce

Sonsuz kümelerin denkliğinden bahsedilebilir mi?

1.5 Kümelerde İşlemler

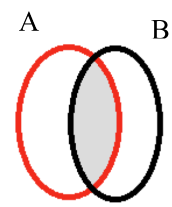
Kümelerde işlem olarak öncelikle birleşim, kesişim, fark ve tümleme işlemleri tanımlanabilir:

➢ A kümesine veya B kümesine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye bu iki kümenin ***birleşimi*** denir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir.



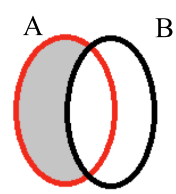
$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$

➢ Hem A kümesine hem B kümesine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye bu iki kümenin ***kesişimi veya arakesiti*** denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir.



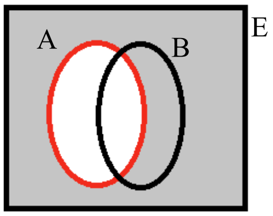
$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$

➢ A kümesine ait olup da B kümesine ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin B kümesinden ***farkı*** denir ve A-B veya A\ B şeklinde gösterilir.



$A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

➢ E evrensel kümesine ait olup da A kümesine ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve -A veya \A veya $A^{/}$ veya A^c şeklinde gösterilir.



$A^{/} = \{x: x \notin A \wedge x \in E\}$

Bu işlemler ile ilgili basit bir örnek verelim. A kümesi "Kırıkkale" kelimesini, B kümesi de "Kastamonu" kelimesini oluşturan harfler kümesi olsun. Bu durumda A = {k,ı,r,a,l,e} ve B = {k,a,s,t,m,o,n,u} olarak bulunacaktır. Bu kümeler ile işlem yapılacak olursa,

$A \cup B$ = {k,ı,r,a,l,e,s,t,m,o,n,u},

$A \cap B$ = {k,a},

A–B = {ı,r,l,e},

B–A = {s,t,m,o,n,u}

kümeleri elde edilecektir. Tümleme işlemi yapmak istersek evrensel kümenin belirlenmesi gerekir. Evrensel küme olarak E={x: x, Türk alfabesindeki harflerden biri} kümesi seçilirse,

$A^{/}$={b,c,ç,d,f,g,ğ,h,i,j,m,n,o,ö,p,s,ş,t,u,ü,v,y,z}

$B^{/}$={b,c,ç,d,e,f,g,ğ,h,ı,i,j,l,ö,p,r,ş,ü,v,y,z}

tümleme kümeleri elde edilir.

Yukarıdaki gibi tanımlanan kümelerde işlemlerin birtakım özelliklerinden bahsedilebilir. Bu özellikler A, B ve C herhangi üç küme ve E evrensel küme olmak üzere aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- $A \cup A=A$ ve $A \cap A=A$ (Tek kuvvet özelliği)
- $A \cup B=B \cup A$ ve $A \cap B=B \cap A$ (Değişme özelliği)
- $(A \cup B) \cup C= A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cap B) \cap C= A \cap (B \cap C)$ (Birleşme özelliği)
- $A \cup \varnothing=\varnothing \cup A=A$ ve $A \cap \varnothing=\varnothing \cap A=\varnothing$
- $A \cup E=E \cup A=E$ ve $A \cap E=E \cap A=A$
- $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ve $(B \cap C) \cup A=(B \cup A) \cap (C \cup A)$ (Birleşimin kesişim üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği)
- $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ve $(B \cup C) \cap A=(B \cap A) \cup (C \cap A)$ (Kesişimin birleşim üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği)
- $(A^{/})^{/}=A$ (Bir kümenin tümleyeninin tümleyeni kendisine eşittir)
- $(A \cup B)^{/}= A^{/} \cap B^{/}$ ve $(A \cap B)^{/}= A^{/} \cup B^{/}$ (De Morgan Kuralları)
- $A-A=\varnothing$, $A-\varnothing=A$, $\varnothing-A=\varnothing$, $A-E=\varnothing$
- $A-B=A \cap B^{/}$

Ayrıca iki kümenin birleşim kümesinin eleman sayısı ile kümelerin kendilerinin ve kesişimlerinin eleman sayısı arasında aşağıdaki ilişkiden bahsedilebilir:

"$s(A \cup B)=s(A)+s(B)-s(A \cap B)$"

Buradan hareketle şu eşitliğe de varılabilir:

"$s(A-B)=s(A)-s(A \cap B)$"

Aşağıdaki örnekler ile bu durumu pekiştirelim.

Örnek: Futbol veya masa tenisinden en az birini oynayan 40 kişilik bir sınıfta 28 öğrenci futbol, 21 öğrenci masa tenisi oynamaktadır. Bu sınıfta her iki oyunu da oynayan kaç öğrenci vardır?

Çözüm: $s(F \cup M)=40$, $s(F)=28$ ve $s(M)=21 \Rightarrow$

$s(F \cup M)=s(F)+s(M)-s(F \cap M) \Rightarrow$

$40=28+21- s(F \cap M) \Rightarrow$

$s(F \cap M)=9$ bulunur.

Örnek: A ve B kümeleri için, $s(A \cup B) = 4x - 6$, $s(A \cap B) = x - 7$, $s(A) = 12 + x$ ve $s(B) = 3x - 8$ ise $A \cap B$ kümesinin üç elemanlı kaç alt kümesi vardır?

Çözüm: $s(A \cup B)=s(A)+s(B)-s(A \cap B) \Rightarrow$

$4x - 6= 12 + x+3x - 8- (x -7) \Rightarrow$

$x=17 \Rightarrow s(A \cap B)=10 \Rightarrow$

kesişim kümesinin C(10,3)=10!/(7!.3!)=120 tane üç elemanlı alt kümesi vardır.

Örnek: Herkesin İngilizce ve Almanca dillerinden en az birini bildiği bir sınıfta İngilizce bilenler Almanca bilenlerin 3 katının 10 fazlasına eşittir. Her iki dili bilen 5 kişi ve sınıf mevcudu 49 kişi ise bu sınıfta Almanca bilenlerin sayısı kaçtır?

Çözüm: s(İ)=3.s(A)+10, s(İ∪A)=49 ve s(İ∩A)=5 olur.

s(İ∪A)=s(İ)+s(A)-s(İ∩A) $\Rightarrow$

$49=3.s(A)+10+ s(A)-5 \Rightarrow$

$4.s(A)=44 \Rightarrow$

$s(A)=11$ bulunur.

Örnek: $X \not\subset Y$ ve $Y \not\subset X$, $s(X \cap Y) \neq 0$, $s(X)=8$ ve $s(Y)=10$ olduğuna göre $X \cup Y$ kümesi en az kaç elemanlı olur?

Çözüm: $X \not\subset Y$ ve $Y \not\subset X$, $s(X \cap Y) \neq 0$ ise X kümesinin Y kümesinde, Y kümesinin de X kümesinde bulunmayan elemanları vardır. Kesişim de boştan farklı olduğuna göre, birleşim kümesinin en az elemanlı olması için kesişim kümesi mümkün olduğu kadar çok elemanlı seçilmelidir. Bu durumda s(X-Y)=s(X)-

$s(X\cap Y)$ eşitliğinden $s(X\cap Y)=s(X)-s(X-Y)$ bulunur. $s(X-Y)=1$ alınırsa $s(X\cap Y)=8-1=7$ dir. Bu durumda $s(X\cup Y)=s(X)+s(Y)-s(X\cap Y)=8+10-7=11$ dir.

Not: A, B, C gibi üç küme alındığında birleşim kümesinin eleman sayısı ise aşağıdaki eşitlikle belirlenebilir:

"$s(A\cup B\cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A\cap B) - s(A\cap C) - s(B\cap C) + s(A\cap B\cap C)$"

Bu eşitlik ile ilgili aşağıdaki örnekler incelenebilir.

Örnek: İngilizce, Almanca ve Fransızca dillerinden en az birinin konuşulduğu bir sınıfta, İngilizce bilenler 16, Almanca bilenler 15, Fransızca bilenler 19 kişidir. İngilizce ve Almanca bilenler 5, İngilizce ve Fransızca bilenler 8, Almanca ve Fransızca bilenler 6 kişidir. Her üç dili de bilenler 3 kişi olduğuna göre sınıf mevcudu kaç kişidir?

Çözüm:

$s(İ\cup A\cup F) = s(İ) + s(A) + s(F) - s(İ\cap A) - s(İ\cap F) - s(A\cap F) + s(İ\cap A\cap F)$

$= 16+15+19-5-8-6+3=34$ bulunur.

BÖLÜM DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdakilerden hangisi bir küme belirtir?

A) {Bazı İnsanlar}
B) {x: x, Akdenize dökülen bir nehir}
C) {x: x, güzel kızlardan biri}
D) {x: x, en iyi futbolcu}
E) {x: x, genç futbolcu}

2. $A = \{a,\{b,c\},\{b,c,d\},e\}$

$B = \{*,\nabla,\varnothing\}$

$C = \{\{\varnothing\}\}$

kümeleri veriliyor. s(A)+s(B)+s(C) kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

3. $A = \{1,\{2,3\},4\}$

$B = \{1,\{2\},\{3\},4\}$

$C = \{\{1\},\{2,3\},4\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) A kümesi dört elemanlıdır.
B) A kümesi C kümesine denktir
C) B kümesi C kümesine denktir
D) A kümesi C kümesine eşittir
E) $\{2,3\}\subset C$

4. Aşağıdakilerden hangisi/hangileri doğrudur?

I. A kümesinin her elemanı, B kümesinin de elemanı ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir ve $A\subset B$ ile gösterilir
II. Her küme kendisinin özalt kümesidir
III. $K\subset M$ ise, M kümesi, K kümesinin alt kümesidir

A) Yalnız III B) I ve III C) Yalnız I D) II ve III E) I, II ve III

5. Sonlu bir A kümesi için s(A)=3 olsun. Bu durumda, A kümesinin kuvvet kümesinin alt ve özalt küme sayısı sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4, 5 B) 8, 7 C) 9, 8 D) 256, 257 E) 256, 255

6. A={a,b,c,d} ve B={1,2,3} kümeleri veriliyor. Bu durumda aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\varnothing \subset A$ ve $\varnothing \subset B$

B) $\{a,b,c,d\} \subset A$ ve $\{1,2,3\} \subset B$

C) $K \subset \{1,3\}$ ise $K \subset B$

D) $\{1\} \subset M \subset \{1,2\}$ ise $M \subset B$

E) $\{a,b\} \subset S$ ise $S \subset B$

7. Alt küme sayısı, {x: x<16, x∈N} kümesinin eleman sayısına eşit olan kümenin eleman sayısı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

8. "Bir kümenin kendisinden farkı boş kümedir" ve "Bir kümenin evrensel kümede bulunmayan hiçbir elemanı yoktur" ifadeleri, matematiksel notasyon ile sırasıyla hangi seçenekte verilmiştir?

A) $A-\varnothing = A$ ve $E\text{-}A = A^c$

B) $A-A = \varnothing$ ve $E^c = \varnothing$

C) $\varnothing-A = \varnothing$ ve $A-E = \varnothing$

D) $A-A = \varnothing$ ve $A-E = \varnothing$

E) $A-\varnothing = A$ ve $A-E = A$

9. C ve D iki küme olmak üzere, $D\cup[(C'\cap D)\cup C]'$ kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $C'\cup D$ B) $C'\cap D$ C) $C\cap D'$ D) $C\cup D'$ E) $C\cup D$

10. X ve Y iki küme ve E evrensel küme olmak üzere, $s(x\cap Y')+s(x')=s(E)$ **olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?**

A) $X\cup Y=E$ B) $X\subset Y$ C) $Y\subset X$ D) $X\cap Y=\varnothing$ E) $Y=\varnothing$

11. 24 kişilik bir sınıfta, öğrencilerin her biri Fransızca, Almanca ve İngilizce dillerinden en az birini bilmektedir. Öğrencilerin 2/3 si Fransızca, 1/4 i Almanca ve 1/6 i ise İngilizce bilmektedir.

Sınıfta bu dillerden sadece ikisini bilen öğrenci olmadığına göre, her üç dili de bilen kaç öğrenci vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. Çince ve Japonca dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu topluluğun 3/8 ü Çince bilmektedir.

Çince bilenlerin 2/5 si Japonca da bildiğine göre yalnız Japonca bilen en az kaç kişi vardır?

A) 15 B) 19 C) 21 D) 25 E) 30

13. A={1,2,3,4,5,6,7,8} kümesinin 6 elemanlı kaç alt kümesi bulunur?

A) 14 B) 28 C) 30 D) 56 E) 64

14. A={1,{2,3,4},5,{6,7},8} kümesinin 4 elemanlı kaç alt kümesi bulunur?

A) 1 B) 4 C) 5 D) 70 E) 84

15. A={1,2,3,4,5,6,7} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde en az bir çift sayı bulunur?

A) 16 B) 24 C) 64 D) 104 E) 112

16. Bir sınıfın %80 i kız öğrencidir. Kızların %25'i gözlüklüdür.

Buna göre, gözlüksüz kızlar sınıfın yüzde kaçıdır?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 70 E) 75

17. X={1,2,3}, Y={1,2,4,5} olduğuna göre $X\cap Y\subseteq A\subseteq(X\cup Y)$ koşulunu sağlayan kaç tane A kümesi vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 8 E) 28

18. A={-3,-1,0,1,3,5,7} kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinin elemanları çarpımı negatiftir?

A) 12 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

19. X = {1,2,3,4}

Y = {1,3,4,5,6,7,8,9}

Z = {3,4,5,10} ise $(X\text{-}Y)\cup(X\text{-}Z)$ kümesinin eleman sayısı, $(X\text{-}Y)\cap(X\text{-}Z)$ kümesinin eleman sayısından kaç fazladır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. N doğal sayılar kümesi, a pozitif bir tamsayı olmak üzere $aN = \{ an | n \in N\}$ kümesi olduğuna göre, $6N \cap 8N$ kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2N B) 6N C) 8N D) 24N E) 48N

CEVAP ANAHTARI

1. B 2. C 3. B 4. C 5. E 6. E 7. B 8. D 9. A 10. D
11. A 12. D 13. B 14. C 15. E 16. C 17. D 18. A 19. A 20. D

Açık uçlu sorular:

- Her şeyi eleman kabul eden bir evrensel küme var mıdır?
- Kendi kendisini eleman kabul eden küme var mıdır? Araştırınız
- A = {1,2,3,…,32} olmak üzere A nın hangi k elamanlı B alt kümesini alırsak alalım, B kümesinde a, b yi, b de c yi bölecek şekilde farklı a, b, c sayılarının bulunmasını sağlayan en küçük k değeri kaçtır?

Konu ile ilgili yapılabilecek projeler:

- Cantor'un hayatını araştırarak küme teorisinin gelişimini inceleyiniz.
- Küme teorisinin modern matematiğe geçişteki yerini araştırınız.
- Küme kavramının ilköğretim birinci kademedeki öğrencilere nasıl verilmesi gerektiğini araştırınız.

Doç. Dr. SERKAN NARLI

Doç.Dr. Serkan NARLI, Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğretim üyesidir. Lisans, yüksek lisans ve doktora eğitimini, aynı fakültenin OÖFMA Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında tamamlamış, doçentlik ünvanını 2011 yılında almıştır. Çalışma alanları ise matematik eğitimi, probleme dayalı öğrenme, sonsuz kümelerin denkliği, eğitimde veri madenciliği, bulanık (fuzzy sets) ve kaba (rough sets) kümeler ve topolojidir.