

Analitik Geometri

Prof. Dr. *Salim Yüce*

8. Baskı





Prof. Dr. *Salim Yüce*

ANALİTİK GEOMETRİ

ISBN 978-605-318-811-7

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarına aittir.

© 2023, PEGEM AKADEMI

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevidir**. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

1. Baskı: Mart 2017, Ankara

8. Baskı: Ekim 2023, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türüldür
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Kuyrukcu
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Prof. Dr. *Salim Yüce*

1974 Tokat/Niksar'da doğdu. İlkokul-ortaokul-liseyi Tokat'ta tamamladı. 1992-1996 yılları arasında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü, 1996-1999 yılları arasında aynı üniversitede Matematik/Geometri alanında yüksek lisansını, 1999-2004 yılları arasında doktorasını tamamladı. 2006 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik bölümünde Doktor Öğretim Üyesi olarak atandı ve aynı yıl Doçent unvanını aldı. 2012 yılında Yıldız Teknik Üniversitesinde Profesör olarak atandı.

2009 yılında Fen Bilimleri Enstitüsünde Müdür Yardımcılığı, 2012 yılında Rektör Yardımcılığı görevlerinde bulundu. 2016 yılında Yıldız Teknik Üniversitesinde Rektör adayı oldu. 2018 yılında YÖK-TEBİP Matematik Üstün Başarı Sınıfında görevlendirildi. Üniversite Yönetim Kurulu ve Senato Üyeliği görevlerini yerine getirmiş olup Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı Başkanlığı görevini Anabilim Dalı Başkanlıklarının kapandığı 2022 yılına kadar yürüttü. 2022 yılı Ağustos ayında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanlığına atanmış olup halen bu görevi yürütmektedir.

Prof. Dr. Salim YÜCE'nin akademik etkinlikleri kapsamında 8 adet kitap yazarlığı, 4 adet ulusal araştırma projesi, tamamlanmış 10 yüksek lisans ve 10 doktora ile devam eden 5 yüksek lisans ve 3 doktora tezi yöneticiliği, uluslararası toplam 87 makalesi, ulusal ve uluslararası kongrelerde 87 adet bildiri sunumu olup çeşitli dergilerde editörlük/hakemliği, 13. Ulusal Geometri Sempozyumu Düzenleme Kurulu Başkanlığı ve Hagia Sophia Journal of Geometry (HSJG) dergisinin baş editörlüğü görevinde bulunmaktadır. Evli ve iki erkek çocuğu sahibidir.

ORCID No: 0000-0002-8296-6495

ÖN SÖZ

Bana olan sevgi, güven ve yardımları ile her zaman yanımda olan başta sevgili annem, babam, eşim, çocuklarım ve kardeşlerim bu kitabın gerçek yazarlarıdır. Bu nedenle hepsinin adına bu kitabı annem Ayşe YÜCE ve babam Muzaffer YÜCE'ye ithaf ediyorum.

Ayrıca, başta 15 Temmuz şehitlerimiz olmak üzere vatan uğruna canlarını feda eden, bizler huzur içinde yaşayalım diye sevdiklerini yetim bırakan tüm şehitlerimize ve halen görev yapan güvenlik kuvvetleri personelimize selam olsun.

Bu kitap, üniversitelerin Matematik, Matematik Mühendisliği, Matematik Bilgisayar, İstatistik, Matematik Öğretmenliği bölümlerinde zorunlu ders olarak ve bazı mühendislik bölümlerinde servis dersi olarak okutulan “Analitik Geometri” derslerine yardımcı olması amacı ile hazırlanmıştır.

Bu bağlamda, kitabın birinci bölümünde, Afin ve Öklid uzayları ve koordinat sistemleri tanıtılmış, ayrıca 3, 4, 7 boyutlu uzaylarda vektörel ve karma çarpım ile bunların geometrik yorumları verilmiş; ikinci bölümde, koordinat dönüşümleri ile \mathbb{R}^2 ve \mathbb{R}^3 duzaylarında dönme kavramı ele alınmış; üçüncü bölümde, 3-boyutlu uzayda doğrunun analitik incelenmesi yapılmış; dördüncü bölümde, uzayda düzlem kavramı ve düzlemlerin birbirine göre durumları lineer denklem sisteminin çözümünün irdelenmesi kullanılarak incelenmiş; beşinci bölümde, genel konikler ve altıncı bölümde ise kuadrikler verilmiştir. Yedinci bölümde, özel yüzeyler tanıtilarak bazıları için Matlab çizimleri verilmiş; sekizinci bölümde, Projektif düzlem ve Projektif uzayda Analitik Geometri bilgileri yeniden ele alınmıştır.

Ayrıca, Analitik Geometrinin temeli olan Lineer Cebir bilgileri Ek-A bölümünde; bazı bölümlerin Analitik Geometri derslerinde verilen \mathbb{R}^2 düzleminde doğru kavramı Ek-B bölümünde ve merkezli konikler (çember, elips, hiperbol, parabol) Ek-C bölümünde verilmiştir. Ayrıca kitabın Ek bölümlerinin, liselerde okutulan Analitik Geometri derslerine yardımcı olunması da amaçlanmıştır.

Kitabın her bölümünün içerisinde konuların daha iyi anlaşılması amacıyla örnekler çözülmüş ve bazı bölüm sonlarında ise alıştırmalar verilmiştir. Ayrıca bölüm dizinleri, bölümler arasında bağlantılar kurularak hazırlanmıştır. Örneğin, genel konik ve genel kuadriklerin merkezli hale getirilmesinde üçüncü bölümde anlatılan eksenlerin ötelenmesi ile döndürülmesi veya Ek-A kısmında anlatılan bir matrisin özdeğer ve özvektörleri kullanılmıştır.

Kitabın yazımının gerçeklemesinde emeği geçen Mücahit AKBIYIK, Esra ERKAN, G. Yeliz ŐENTÜRK ve G. Kemal NALBANT nezdinde tüm geometri grubu asistanlarıma teŐekkür ederim. Ayrıca, belki de tüm akademik hayatımın baŐlangıcı sayabileceğim Matematik sevdamın baŐlamasına vesile olan lise Matematik đretmenim Sayın Őkr ADIGÜZEL ile akademik hayatımın her noktasında yanımda olan Hocam Sayın Prof. Dr. Nuri KURUOđLU'na emekleri için de teŐekkür ederim.

2022

Prof. Dr. *Salim Yüce*

Yıldız Teknik niversitesi

sayuce@yildiz.edu.tr

ORCID No: 0000-0002-8296-6495

İÇİNDEKİLER

Ön Söz.....v

1. Bölüm

Koordinat Sistemleri ve Vektörel Çarpımı

1.1 Afın Uzay.....	2
1.1.1 Afın Çatı	3
1.1.2 Afın Koordinat Sistemi.....	4
1.1.3 Afın Koordinat Sistemi Değişimi.....	5
1.2 Öklid Uzayı	6
1.2.1 Öklid Çatısı	6
1.2.2 Öklid Koordinat Sistemi.....	7
1.3 E^2 Öklid Düzleminde Özel Koordinat Sistemleri	7
1.3.1 Dik Koordinat Sistemi.....	7
1.3.2 Eğik Koordinat Sistemi.....	7
1.3.3 Kutupsal Koordinat Sistemi	9
1.4 E^3 Öklid Uzayında Özel Koordinat Sistemleri	13
1.4.1 Dik Koordinat Sistemi	13
1.4.2 Silindirik Koordinat Sistemi	14
1.4.3 Küresel Koordinat Sistemi.....	18
1.5 \mathbb{R}^3 Uzayında Vektörel Çarpım ve Karma Çarpım.....	21
1.5.1 Vektörel Çarpım	21
1.5.2 Karma Çarpım.....	23
1.5.3 \mathbb{R}^3 Uzayında Üç Vektörün Vektörel Çarpımı	23
1.5.4 Jacobi Özdeşliği	24
1.5.5 Lagrange Özdeşliği.....	24
1.5.6 Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu	26
1.5.7 Karma Çarpımın Geometrik Yorumu.....	26

1.6 \mathbb{R}^4 Uzayında Vektörel Çarpım	26
1.7 \mathbb{R}^7 Uzayında Vektörel Çarpım	29
1.8 Alıştırmalar	33

2. Bölüm

Koordinat Dönüşümleri

2.1 Öteleme	36
2.1.1 Koordinat Sistemlerinin Ötelenmesi	36
2.1.2 Noktanın (Vektörün) Ötelenmesi	39
2.2 Dönme	41
2.2.1 Eksenlerin Dönmesi	41
2.2.2 Dönmenin Kompleks İfadesi	42
2.2.3 Noktanın Dönmesi	46
2.2.4 Hiperbolik ve Parabolik Dönme	47
2.3 Öteleme ve Dönmeler	48
2.4 Bir Noktanın Dik Koordinat Sistemi ile Eğik Koordinat Sistemindeki Koordinatları Arasındaki Bağlıntılar	49
2.5 Düzlemde Yansımalar	52
2.5.1 Ox -Eksenine Göre Yansıma	54
2.5.2 Orijininden Geçen ve Eğimi τ Olan Bir h Doğrusuna Göre Yansıma	55
2.5.3 Kesişen İki Doğruya Göre Yansıma	56
2.5.4 Orijininden Geçmeyen Bir k Doğrusuna Göre Yansıma	60
2.5.5 Hiperbolik ve Parabolik Yansıma	62
2.6 Düzlemin Diğer Dönüşümleri	62
2.6.1 Hareket ve Benzerlik Dönüşümü	62
2.6.2 Afin Dönüşümler	64
2.6.3 İzdüşümler	66
2.6.4 Projektif Dönüşümler	70
2.6.5 Topolojik Dönüşümler	71

2.7 \mathbb{R}^3 Uzayında Dönme	72
2.7.1 Olin-Rodrigues Formülünün Bir Diğer İspatı.....	76
2.8 Alıştırmalar	78

3. Bölüm

Uzayda Doğru

3.1 İki Noktadan Geçen Doğru Denklemi.....	80
3.2 Bir Noktası ve Doğrultman Vektörü Verilen Doğrunun Denklemi.....	81
3.3 Uzayda Bir Doğrunun Koordinat Eksenleri ile Yaptığı Açılar Cinsinden Denklemi.....	83
3.4 Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı	84
3.5 Uzayda İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları	86
3.6 Kesişen İki Doğru Arasındaki Açılış	88
3.7 Kesim Noktasının Bulunması.....	89
3.8 Aykırı Doğrular	89
3.9 \mathbb{R}^3 Uzayında Plücker Doğru Koordinatları.....	92
3.10 Alıştırmalar	96

4. Bölüm

Uzayda Düzlem

4.1 Doğrudaş Olmayan Üç Noktadan Geçen Düzlem Denklemi	100
4.2 Bir Noktadan Geçen ve Verilen Bir Doğrultuya Dik Olan Düzlem Denklemi.....	101
4.3 Bir Düzlemin Koordinat Eksenlerinden Ayırdığı Parçalar Cinsinden İfadesi	103
4.4 Verilen Bir Noktadan Geçen ve İki Doğrultuya Paralel Olan Düzlem Denklemi	105

4.5 Bir Doğru ve Dışındaki Bir Noktadan Geçen Bir Düzlemin Denklemi	106
4.6 Kesişen İki Doğrunun Belirttiği Düzlem Denklemi	108
4.7 Bir Düzlemin Hesse Normal Formu.....	108
4.8 Özel Düzlemler	109
4.9 Bir Noktanın Bir Düzlem Üzerindeki Dik İzdüşümü	112
4.10 Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı	114
4.11 Bir Doğru ile Bir Düzlemin Birbirine Göre Durumları.....	116
4.12 Bir Düzlem ile Bir Doğrunun Kesim Noktasının Bulunması	117
4.13 Uzayda Bir Doğru ile Bir Düzlem Arasındaki Açılı.....	119
4.14 İki Düzlemin Birbirine Göre Durumu.....	120
4.15 İki Düzlem Arasındaki Açılı.....	122
4.16 Kesişen İki Düzlemin Arakesit Doğrusunun Bulunması	123
4.17 İki Düzlemin Açılı Düzleminin Denklemi	124
4.18 Üç Düzlemin Birbirine Göre Durumu.....	125
4.19 Aykırı İki Doğrunun Ortak Dikmesi ve En Kısa Uzaklık.....	130
4.20 Bir Doğrudan Geçen Düzlem Demeti	136
4.21 İzdüşüm	137
4.21.1 Bir Noktanın Düzlem Üzerine Dik İzdüşümü	137
4.21.2 Bir Doğrunun Düzlem Üzerine Dik İzdüşümü	137
4.21.3 Bir Doğrunun Bir Düzlem Üzerine Verilen Bir Doğruya Göre Paralel İzdüşümü	139
4.21.4 Bir Doğru Parçasının Bir Doğru Üzerindeki İzdüşümünün Uzunluğu	140
4.21.5 Bir Doğru Parçasının Bir Düzlem Üzerindeki İzdüşümünün Uzunluğu	140
4.22 Uzayda Yansıma	141
4.22.1 Uzayda Bir Noktanın Bir Düzleme Göre Yansıması.....	141
4.22.2 Uzayda Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Yansıması	144
4.23 Alıştırmalar	146

5. Bölüm

Genel Konikler

5.1 Genel Konik Denklemi.....	150
5.2 Koniklerin Standart Denklemi.....	150
5.3 Genel konik Denkleminin Merkezil Hale Dönüştürülmesi	151
5.3.1 Eksenlerin Ötelenmesi	151
5.3.2 Eksenlerin Döndürülmesi.....	154
5.4 Koniklerin Sınıflandırılması	155
5.4.1 Koniklerin Bir Başka Sınıflandırılması.....	156
5.5 Matris Formunda Genel Konik Denklemi.....	156
5.5.1 Koniklerin Sınıflandırılması	157
5.5.2 Merkezil Hale Dönüştürme	157
5.6 Bir Konik ile Bir Doğrunun Konumu.....	160
5.7 Bir Konik ile Bir Noktanın Konumu	161
5.8 Koniklerde Teğet	161
5.9 Koniklerin Elemanları	164
5.9.1 Koniklerde Merkez.....	165
5.9.2 Koniklerde Çap (Köşegen).....	170
5.9.3 Koniklerde Eksen	175
5.9.4 Koniklerde Köşe (Tepe) Noktaları	180
5.9.5 Koniklerde Asimptot	183
5.9.6 Koniklerde Odak ve Doğrultman	185
5.9.7 Koniklerde Kutup Noktası ve Kutup Doğrusu	200
5.10 Konik Aileleri	205
5.11 Koniklerin Parametrik ve Kutupsal Koordinatlarla Temsili.....	214
5.11.1 Koniğin Parametrik Gösterimi.....	214
5.11.2 Koniğin Kutupsal Koordinatlarda Gösterimi.....	216
5.12 Alıştırılmalar	219

6. Bölüm

Kuadrikler (2. Dereceden Yüzeyler)

6.1 Küre.....	224
6.2 Elipsoid.....	225
6.3 Tek Kanatlı Hiperboloid.....	225
6.4 Çift Kanatlı Hiperboloid.....	226
6.5 Eliptik Koni.....	227
6.6 Eliptik Paraboloid.....	228
6.7 Hiperbolik Paraboloid.....	228
6.8 Eliptik Silindir.....	229
6.9 Parabolik Silindir.....	230
6.10 Hiperbolik Silindir.....	230
6.11 Kesişen Bir Çift Düzlem.....	231
6.12 Çakışık Bir Çift Düzlem.....	231
6.13 Genel Kuadrik Denklemi.....	231
6.14 Kuadriklerin Merkezil Hale Dönüştürülmesi.....	232
6.14.1 Öteleme.....	232
6.14.2 Dönme.....	233
6.15 Matris Formu ile Merkezil Hale Getirme.....	233
6.15.1 Sınıflandırma.....	234
6.15.2 Öteleme.....	234
6.15.3 Dönme.....	235
6.16 Kuadrik Çiziminde İzlenecek Yollar.....	240
6.17 Alıştırmalar.....	257

7. Bölüm

Özel Yüzeyle

7.1 Silindir	261
7.2 Koni.....	264
7.2.1 Koninin Denklemi	265
7.2.2 Koninin Vektörel Denklemi.....	267
7.3 Dönel Yüzeyle.....	267
7.4 Tor Yüzeyle (Dönme Toru).....	272
7.5 Paralel Hiperyüzeyle	273

8. Bölüm

Projektif Düzlem ve Projektif Uzay

8.1 Temel Kavramlar	278
8.1.1 Genişletilmiş Düzlem	279
8.1.2 Projektif Uzay	280
8.2 Düzlemde Homojen Koordinatlar	281
8.2.1 Düzlemin İdeal Noktaları	284
8.2.2 Düzlemde Bir Doğrunun Homojen Denklemi	286
8.3 Projektif Analitik Geometri.....	289
8.3.1 Projektif Düzlemde Üç Projektif Noktanın Doğrudaşlığı	289
8.3.2 Projektif Düzlemde Üç Projektif Doğrunun Noktadaşlığı	290
8.3.3 İki Doğrunun Arakesit Noktasını Bulma.....	291
8.3.4 Projektif Düzlemde İki Projektif Noktası Verilen Projektif Doğrunun Denklemi	291
8.4 Projektif Düzlem Geometrileri.....	292
8.4.1 Projektif Düzlemin Hareket Dönüşümleri	297
8.4.2 Projektif Düzlemin Geometrileri.....	297
8.5 Üç Boyutlu Uzayda Homojen Koordinatlar	304
8.5.1 Genişletilmiş Düzlem Denklemi.....	305
8.5.2 Genişletilmiş Doğrunun İdeal Noktası	306

Ek-A Lineer Cebir	309
Ek-B Düzlemde Doğru	325
Ek-C Merkezil Konikler	341
Ek-D Çift Oran	399
Kaynaklar	405
Dizin	407

1. BÖLÜM

KOORDİNAT SİSTEMLERİ VE VEKTÖREL ÇARPIM

Bu bölümde, afin koordinat sistemi, Öklid koordinat sistemi başta olmak üzere kutupsal, silindirik ve küresel koordinat sistemleri tanıtıldı. Ayrıca 3- boyutta, 4- boyutta ve 7- boyutta vektörel çarpım ve özellikleri ile geometrik yorumları verildi.