

# Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri

---

Prof. Dr. *Salim Yüce*

Güncellenmiş | 8. Baskı





Prof. Dr. *Salim Yüce*

## ÖKLİD UZAYINDA DİFERANSİYEL GEOMETRİ

ISBN 978-605-318-812-4

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarına aittir.

© 2022, PEGEM AKADEMI

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz, dağıtılamaz. Bu kitap T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayinevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayinevidir**. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** ve **Pegemindex.net** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

1. Baskı: Şubat 2017, Ankara  
Güncellenmiş 8. Baskı: Aralık 2022, Ankara

Yayın-Proje: Ferdi Akkaya  
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Kuyrukcu  
Kapak Tasarım: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.  
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara  
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818  
Matbaa Sertifika No: 47865

### İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA  
Yayınevi: 0312 430 67 50  
Dağıtım: 0312 434 54 24  
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60  
İnternet: [www.pegem.net](http://www.pegem.net)  
E-ileti: [pegem@pegem.net](mailto:pegem@pegem.net)  
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

## SEKİZİNCİ BASKIYA ÖN SÖZ

Kitabın dört baskısından sonra, gerek öğrencilerimizden gerekse öğretim elemanlarından aldığım pozitif yorumlar ışığında yeni baskıda güncelleme yapma ihtiyacı doğmuştur. Bu doğrultuda, kitap bölümlerinin lisans ve lisansüstü seviyede Diferansiyel Geometri dersleri için daha verimli bir yapıya kavuşması amaçlanmıştır:

- Eğriler Teorisi, sırasıyla,  $E^2$ ,  $E^3$ ,  $E^4$  ve  $E^n$  Öklid uzaylarında ayrı ayrı anlatıldı.
- Diferansiyel Formlar, öncelikle  $E^n$  Öklid uzayında ve  $E^3$  uzayında yüzeyler üzerinde verildi. Sonrasında da  $E^3$  ve  $E^n$  Öklid uzaylarının yüzeyleri arasındaki dönüşümler altında ayrı ayrı incelendi.
- Yüzeyler Teorisi ise, öncelikle  $E^3$  Öklid uzayında kapalı ve parametrik formda;  $E^4$  Öklid uzayında 3-parametrelili formda;  $E^n$  Öklid uzayında hiperyüzeyler ve 2-parametrik yüzey olarak iki alt bölümde incelendi. Ayrıca üç boyutlu uzayda yüzey üzerinde geodezik eğrilere özel bir bölüm ayrılarak geodezik olma şartlarını veren diferansiyel denklem sistemi verilmiş ve yüzey üzerinde bir nokta ve eğri arasındaki en kısa uzaklık hesaplanmıştır.
- Güncellenmiş yeni baskıda, konular farklı bakış açısı ile yeniden geometrik olarak ele alınmış ve bölüm sonlarına çözülmüş sorular ilave edilmiştir.

Böylece her bir konu ayrı bölümler altında incelenerek kitabın lisans, yüksek lisans ve doktora derslerinde okutulabilmesi sağlanmıştır.

Prof. Dr. *Salim Yüce*

Yıldız Teknik Üniversitesi

sayuce@yildiz.edu.tr

ORCID No: 0000-0002-8296-6495



## ÖN SÖZ

Kitabımı, bu ülke için canlarını feda eden  
**tüm 15 Temmuz şehitlerimiz** nezdinde  
mesai arkadaşım **Prof. Dr. İlhan VARANK**  
kardeşime ithaf ediyorum.

Bu kitap, üniversitelerin Matematik, Matematik Mühendisliği, Matematik Bilgisayar, İstatistik, Matematik Öğretmenliği ve Jeoloji Mühendisliği bölümlerinde lisans ve lisansüstü düzeyde okutulan “Diferansiyel Geometri” derslerinin kaynak kitabı olacağı düşüncesiyle kaleme alınmıştır. Bu kitap sadece Öklid uzayı üzerine inşa edilmiştir. Planlanan bir sonraki kitapta ise sadece Manifoldların incelenmesi düşünülmektedir.

Bu bağlamda, kitabın birinci bölümünde temel kavram olarak Afin ve Öklid uzayları tanıtılmış; ikinci bölümde, diferansiyellenebilir fonksiyonlar, tanjant vektör-vektör alanı, yöne göre türev, kovaryant türev, Lie operatörü, kotanjant vektör, 1 form, diferansiyel formlar, gradient-divergens-rotasyonel fonksiyonlar ve türev dönüşümü verilmiş; üçüncü bölümde, 2, 3 veya  $n$ -boyutlu Öklid uzaylarında ve Minkowski 3-uzayında eğriler teorisi incelenmiş, ayrıca özel eğriler ve özel eğri çiftleri verilmiş; dördüncü bölümde,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında hiperyüzeyler ile 3-boyutlu Öklid uzayında yüzeyler teorisi incelenmiş ve ayrıca yüzey üzerindeki eğrilerin eğrilikleri ile yüzeyin eğrilikleri arasında bağıntılar elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise yüzeylerin dönüşümleri, global özellikleri, yüzeyler üzerinde formlar ve Gauss Bonnet teoremi üzerinde durulmuş; altıncı bölümde özel yüzeyler incelenmiş ve her biri için Matlab çizimleri verilerek örneklendirilmiştir.

Bunlara ek olarak her bölüm içerisinde konulara özel sorular çözülmüş ve konu sonunda da alıştırmalar verilmiştir. En önemlisi de yedinci ve son bölüm olan “Maple Uygulamaları” bölümünde kitap içerisinde anlatılan bazı geometrik formüller için kodlar verilmiştir. Kitabın tüm metnini titizlikle okuyarak yapıcı uyarı ve önerilerinde bulunan Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR Hocama, ayrıca kitabın yazımını gerçekleyen Doç. Dr. Nurten (BAYRAK) GÜRSES, Dr. Öğr. Üyesi G. Yeliz ŞENTÜRK, Arş. Gör. Dr. Esra ERKAN, Dr. Öğr. Üyesi G. Kemal NALBANT ile MAPLE kodlarını yazan Doç. Dr. Mutlu AKAR nezdinde tüm geometri grubu asistanlarıma teşekkür ederim.

Son olarak, akademik hayatımın her noktasında yanımda olan Hocam Sayın Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU'na emekleri için teşekkürlerimi sunarım.

Bana olan sevgi, güven ve yardımları ile her zaman yanımda olan sevgili annem, babam, eşim, çocuklarım ve kardeşlerim bu kitabın gerçek yazarlarıdır.

Prof. Dr. *Salim Yüce*  
ORCID No: 0000-0002-8296-6495  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
sayuce@yildiz.edu.tr

## KİTAP HAKKINDA

Bu kitap, üniversitelerin Matematik, Matematik-Bilgisayar, Matematik Mühendisliği ve Matematik Öğretmenliği bölümlerinde Lisans düzeyinde zorunlu ders olarak verilen “Diferansiyel Geometri” dersi için kaynak kitap olarak tavsiye edilir nitelikte kaleme alınmıştır. Buna ilaveten, diferansiyel geometri teorik bir ders olmasına rağmen fizik ve mühendisliğin bazı alanlarında uygulamalarını görmek mümkündür. Bu nedenle, Fizik ve Mühendisliğin bazı bölümlerinde Diferansiyel Geometri ile ilgili lisans ya da lisansüstü düzeyinde verilen zorunlu ya da seçmeli dersler için de kaynak kitap olarak tavsiye edebileceğim bir eserdir.

Bu eserin temel amacı  $n$ -boyutlu Öklid uzaylarında eğriler, yüzeyler ve hiperyüzeyler ile ilgili temel tanım ve sonuçları ifade ederek bu sonuçları destekleyici örnekleri vermektir. Bu amaca ulaşmak için ilk bölümlerde bazı hazırlıklar yapılmıştır. Özellikle afin uzay ve Öklid uzayı ve bunların alt uzayları tanıtılmıştır. Ayrıca diferansiyellenebilir fonksiyonlar ile ilgili temel tanımlar, sonuçlar ve örnekler verilmiştir. Özellikle, yöne göre türev ve kovaryant türev kavramları tanıtılmış ve konunun daha iyi anlaşılması için de gradient fonksiyonu, divergent fonksiyonu ve rotasyonel fonksiyonları ele alınmıştır. Bu fonksiyonları önemli kılan bir diğer özellik de bunların Fizik de önemli bir uygulama sahasının olmasıdır.

Kitabın ilerleyen bölümünde, sırasıyla, 3-boyutlu, 4-boyutlu ve  $n$ -boyutlu Öklid uzaylarındaki eğrilerin teorisi ile ilgili detaylı bilgiler verilmiştir. Bu eğrilerin Frenet çatıları ve Frenet eğrilikleri ve bunların uygulamaları ile ilgili bazı sınıflandırmalara da yer verilmiştir. Özellikle, küresel eğriler, helisler, evolüt ve involüt eğrileri, Bertrand eğri çiftleri ve Bezier eğrileri ele alınmıştır. Sonraki bölümde, Öklid 3- uzayında yüzeyler ele alınmıştır. Özellikle, yüzeyler üzerinde temel formlar, şekil operatörü, normal eğrilik, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilikleri incelenmiş, bu konuları pekiştirici örneklere yer verilmiştir. Bu bölümde integral geometriye de yer verilmiş, yüzeylerin yüzey alanları ile ilgili hesaplamalar yapılmıştır. Buna ek olarak, Stokes teoremi ve Gauss Bonnet teoremi gibi önemli teoremlerin geometrik yorumlarına da yer verilmiştir. İlerleyen bölümde Öklidyen  $n$ -uzayında hiperyüzeyler ile parametrik 2-yüzeyler ile ilgili bazı temel kavramlar, sonuçlar ve uygulama örnekleri verilmiştir. Özellikle hiperyüzeyler üzerinde temel formlar, şekil operatörü, temel formlar, asli eğrilikler, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik konuları detaylı incelenmiş bazı özel hiperyüzeyler ve bunların eğrilikleri hesaplanmıştır. Son bölümde ise önceki bölümlerde verilen diferansiyellenebilir fonksiyonlar, dönüşümler, eğriler ve yüzey örneklerinin maple uygulamalarına yer verilmiştir. Konuların daha iyi anlaşılması için de her alt bölümün sonunda alıştırmalara yer verilmiştir.

Sonuç olarak, eser hazırlanırken birbirini takip eden konular arasında belirli bir koordinasyon sağlanmış, örnekler konunun özünü temsil eder nitelikte seçilmiştir. Ayrıca kitabın hazırlanmasında yararlanılan kaynaklar bu alanda en seçici eserlerdir. Böylece, “Diferansiyel Geometri” alanında çalışmalar için tavsiye edebileceğim bir kaynak kitap niteliği kazandırılmıştır. Bu nedenle, bu çalışmayı büyük bir özveri ile hazırlayan sevgili meslektaşım Prof. Dr. Salim YÜCE’yi emeklerinden dolayı kutlarım.

Prof. Dr. Kadri ARSLAN  
ORCID No: 0000-0002-1440-7050  
Uludağ Üniversitesi  
Bursa, 2020



## İÇİNDEKİLER

Sekizinci Baskıya Ön Söz.....	iii
Ön Söz.....	v
Kitap Hakkında.....	vii

### 1. BÖLÜM

#### AFİN UZAY VE ÖKLİD UZAYI

1.1 Afın Uzay.....	2
1.2 Öklid Uzayı.....	6
Alıştırmalar 1.1.....	11

### 2. BÖLÜM

#### DİFERANSİYELLENEBİLİR FONKSİYONLAR

2.1 $k$ -yüncü Sınıftan Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar.....	14
2.1.1 Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar.....	16
Alıştırmalar 2.1.....	22
2.2 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar.....	23
2.3 Yöne Göre Türev.....	26
2.3.1 Yöne Göre Türevin Geometrik Yorumu.....	28
2.4 Vektör Alanları ve Vektör Alanlarının Uzayı.....	34
2.4.1 Reel Değerli Fonksiyonların Bir Vektör Alanı Yönündeki Türevi.....	37
2.4.2 Eğri Yönünde Yöne Göre Türev.....	39
2.4.3 Modülünün Bazı.....	41
2.5 Bir Vektör Alanının Bir Diğer Vektör Alanına Göre Kovaryant Türevi.....	44
2.6 Lie Operatörü.....	50
Alıştırmalar 2.2.....	58
2.7 Kotanjant Vektör ve 1-Form.....	62
2.8 Diferansiyel Operatör ( $d$ Operatörü).....	64
Alıştırmalar 2.3.....	71
2.9 Gradient, Divergens ve Rotasyonel Fonksiyonlar.....	72
2.9.1 Gradient Fonksiyonu.....	72
Alıştırmalar 2.4.....	74
2.9.2 Divergens Fonksiyonu.....	76
2.9.3 Rotasyonel Fonksiyon.....	78

Alıştırmalar 2.5 .....	80
2.10 Türev Dönüşümü.....	81
2.10.1 Türev Dönüşümünün Geometrik Yorumu .....	88
2.10.2 Türev Dönüşümünün Matrisi .....	94
2.11 Diferansiyel Formlar .....	100
2.11.1 Alterne (Dış, Kutupsal, Anti-Simetrik) Çarpım.....	101
2.11.2 Alterne Çarpımın Determinantla Tanımlanması.....	107
2.11.3 Dış Türev.....	108
Alıştırmalar 2.6 .....	117
2.12 Dönüşümün Diferansiyel-Formlara Uygulanması .....	119

### 3. BÖLÜM

#### EĞRİLER TEORİSİ

3.1 Eğri Tanımı .....	128
3.2 Hız Vektörü.....	131
3.3 Skalar Hız Fonksiyonu ve Skalar Hız.....	133
3.4 Parametre Değişimi .....	135
3.5 $E^2$ Öklid Düzlemde Eğriler Teorisi .....	144
3.5.1 Düzlemde Eğrilerin Eğriliği .....	145
3.5.2 Açık Fonksiyonları.....	149
3.5.3 Düzlemsel Eğriler İçin Frenet Formülleri.....	152
3.5.4 Öklid Düzleminde Özel Eğriler .....	155
3.5.5 Toplam İşaretili Eğrilik.....	160
3.5.6 Kapalı Bir Eğrinin Dönme İndeksi.....	162
3.5.7 Green Teoremi.....	163
3.5.8 Zarf Eğrisi ve Destek Fonksiyonu.....	168
Alıştırmalar 3.1 .....	171
3.6 $E^3$ Öklid Uzayında Eğriler Teorisi.....	173
3.6.1 Birim Hızlı Eğriler İçin Frenet Formülleri ve Eğrilikler .....	173
3.6.2 Özel Düzlemler .....	180
3.6.3 $\kappa$ ve $\tau$ Eğriliklerinin Geometrik Yorumu .....	182
3.6.4 Birim Hızlı Olmayan Eğriler İçin Frenet Formülleri ve Eğrilikler .....	186
3.6.5 Eğriler Teorisi Üzerine Çözülmüş Örnekler .....	191
Alıştırmalar 3.2 .....	203
3.7 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Frenet Formülleri ve Eğrilikler.....	210
3.8 $E^3$ Öklid Uzayında Özel Eğriler.....	212

3.8.1 Küresel Eğriler .....	212
3.8.2 Oskülatör Küre .....	213
3.8.3 Helisler (Eğilim Çizgileri).....	222
Alıştırmalar 3.3 .....	226
3.8.4 İnvolut (Basıt) ve Evolüt (Mebcut) Eğri Çifti .....	227
3.8.5 Bertrand Eğri Çifti .....	228
3.8.6 Bezier Eğrileri.....	232
3.8.6.1 Lineer Bézier Eğrisi .....	233
3.8.6.2 Kuadratik Bézier Eğrisi.....	234
3.8.6.3 Kübik Bézier Eğrisi.....	234
3.8.6.4 Bernstein Polinomunun Özellikleri.....	234
3.8.6.5 Bézier Eğrisinin Matris Formu .....	238
3.8.6.6 Bézier Eğrisinin Türevleri .....	240
3.8.6.7 $E^3$ Öklid Uzayında Bézier Eğrileri İçin Serret-Frenet Elemanları .....	244
3.9 $E^3$ Öklid Uzayında Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri .....	254
Alıştırmalar 3.4 .....	259
3.10 Bağ Formları .....	260
3.11 $E^4$ Öklid Uzayında Eğriler Teorisi.....	265
3.11.1 $E^4$ Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri.....	265
3.11.2 $E^4$ Öklid Uzayında Eğriler İçin Parametre Değişimi .....	268
3.11.3 $E^4$ Öklid Uzayında 3-Küre Üzerinde Eğriler .....	271
3.11.4 $E^4$ Öklid Uzayında Silindirik Helis.....	275
3.12 $E^n$ Öklid Uzayında Eğriler Teorisi.....	276
3.12.1 Serret-Frenet Vektörleri .....	276
3.12.2 Bir Eğrinin Oskülatör Hiperdüzlemleri.....	279
3.12.3 Frenet Formülleri ve Eğrilikler .....	280
3.12.4 Küresel Eğrilikler ve Oskülatör Küre .....	288
3.12.5 İnvolut (Basıt) ve Evolüt (Mebcut) Eğri Çifti.....	295
3.12.6 Bertrand Eğri Çifti.....	296
3.12.7 Eğilim Çizgileri (Helisler) .....	296
3.12.8 Yüksek Mertebeden Eğriliklerin Harmonik Eğrilikler Cinsinden İfadesi.....	302
3.12.9 Eğilim Çizgileri İçin Diğer Karakterizasyon.....	304

## 4. BÖLÜM

### $E^3$ ÖKLİD UZAYINDA YÜZEYLER TEORİSİ

4.1 Kapalı Denklem Yardımıyla Yüzey ve Yüzeyin Teğet Vektörü .....	310
4.2 $E^3$ Öklid Uzayında Parametrik Yüzey.....	311
4.2.1 Yüzey Üzerinde Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar ve Eğri .....	316
4.2.2 Yüzeyin Teğet ve Normal Vektörü.....	320
4.2.3 Koordinat Eğrileri.....	322
4.2.4 Yüzeyin Teğet Düzlemi .....	324
4.2.5. Mongre Yüzeyi .....	327
4.2.6 Yüzeylerde Yönlendirme.....	328
Alıştırmalar 4.1 .....	330
4.3 Yüzeyler Üzerinde Şekil Operatörü (Weingarten Dönüşümü).....	332
4.3.1 $E^3$ Öklid Uzayında Bir Parametrik Yüzeyin Şekil Operatörünün Matrisinin Hesabı .....	334
4.4 Gauss Dönüşümü .....	343
4.5 Gauss Dönüşümü ve Şekil Operatörü Arasındaki İlişki .....	345
4.6 Temel Formlar .....	345
4.7 Normal Eğrilik.....	349
4.8 Asli (Asal) Eğrilik ve Umbilik Nokta.....	354
4.9 Eğrilik Çizgisi (Asli Eğri) .....	362
4.10 Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğrilik.....	367
4.10.1 Monge Yüzeyinin Gauss ve Ortalama Eğriliği.....	379
4.10.2 Kapalı Formda Verilen Yüzeyin Gauss ve Ortalama Eğriliği.....	381
4.11 Asimptotik Doğrultu ve Eşlenik Doğrultular.....	383
4.12 Christoffel Sembolleri.....	390
4.13 Yüzey Üzerinde Eğriler Teorisi .....	392
4.13.1 Yüzey Üzerinde Geodezik Eğriler .....	392
Alıştırmalar 4.2 .....	407
4.13.2 Yüzeyler Üzerinde Eğriliklerin Geodezik ve Normal Eğriliği .....	414
4.13.3 Yüzey Eğrisinin Darboux Çatısı .....	418
Alıştırmalar 4.3 .....	420
4.14 Dupin Göstergesi.....	421
4.14.1 $E^3$ Uzayında Bir Yüzeyin Noktalarının Sınıflandırılması.....	421
4.15 Yüzeyler Üzerinde Gauss Anlamında Kovaryant Türev.....	422
4.15.1 Gauss Denklemine Küresel Göstergelere Uygulanması .....	425
4.16 Yüzeylerin Global Özellikleri.....	426

4.17 Yüzeyler Üzerinde Form Hesaplamaları ve Özel Denklemler.....	429
Alıştırmalar 4.4.....	437
4.18 Yüzey Üzerinde Yöne Göre Türev ve Lie Operatörü.....	438
4.19 Yüzey Üzerinde Diferansiyel Formlar.....	444
4.20 Yüzey Dönüşümleri.....	449
4.20.1 Yüzey Dönüşümünün Türev Dönüşümü .....	451
4.20.2 Türev Dönüşümünün Matris İfadesi.....	452
4.20.3 Yüzey Üzerinde İzometri.....	457
4.21 Yüzey Dönüşümleri Altında Formların İncelenmesi .....	464
Alıştırmalar 4.5.....	466
4.22 İntegral Geometri.....	467
4.22.1 Yüzey Alanları.....	467
4.22.2 Diferansiyel Formların İntegrali.....	468
4.22.3 Stokes Teoremi.....	471
4.22.4 Gauss Bonnet Teoremi.....	474
4.23 Yüzeyler Teorisi Çözümlü Örnekler .....	481
Alıştırmalar 4.6.....	510

## 5. BÖLÜM

### $E^3$ ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL YÜZEYLER

5.1 Minimal Yüzeyler.....	512
5.2 Paralel Yüzeyler .....	515
5.3 Möbiüs Şeridi.....	521
5.4 Klein Şişesi .....	521
5.5 Dönel Yüzeyler .....	522
5.6 Regle Yüzeyler.....	524
5.6.1 Regle Yüzey Örnekleri.....	525
5.6.2 Regle Yüzeyin Teğet Düzlemi.....	530
5.6.3 Regle Yüzeyin Özellikleri.....	531
5.6.4 Regle Yüzey Üzerinde Otonormal Çatı Alanları.....	533
5.6.4.1 Regle Yüzeyin Geodezik Çatısı ve Geodezik Frenet Formülleri.....	533
5.6.4.2 Regle Yüzeyin Geodezik Çatısı ile Küresel Gösterge Eğrisinin Frenet Çatısı Arasındaki İlişki .....	539
5.6.4.3 Regle Yüzey Üzerinde Ortonormal $\{T, e, \mathcal{N}\}$ Çatısı.....	539
5.6.5 Regle Yüzeyin Global Özellikleri .....	541

5.6.5.1 Striksiyon Eğrisi.....	541
5.6.5.2 Regle Yüzeyin Açılabilirliği .....	542
5.7 Tor Yüzeyi.....	546
5.8 Bézier Yüzeyi.....	546
5.8.1 Bézier Yüzeylerinin Türevleri.....	547
5.9 Özel Yüzeyler Çözümlü Örnekler .....	548

## 6. BÖLÜM

### $E^4$ ÖKLİD HİPERYÜZEYLER TEORİSİ

6.1 $E^4$ Öklid Uzayında Hiperyüzey .....	556
6.2 Hiperyüzeyler Üzerinde Şekil Operatörü .....	559
6.2.1 Weingarten Dönüşümünün Matris Hesabı .....	560
6.2.2 Weingarten Dönüşümünün Ortonormal Bazına Göre Matris Hesabı .....	562
6.3 Gauss Dönüşümü.....	566
6.4 Temel Formlar .....	570
6.5 Asli Eğrilik, Asli Doğrultu.....	575
6.6 Gauss Eğriliği, Ortalama Eğriliği .....	575
6.7 Eğrilik Çizgisi.....	588
6.8 $E^4$ Öklid Uzayında Bir Hiperyüzeyin Dupin Göstergesi .....	589
6.8.1 $E^4$ Öklid Uzayında Bir Hiperyüzeyin Noktalarının Sınıflandırılması .....	589
6.9 Hiperyüzeyler Üzerine Çözülmüş Örnekler.....	594

## 7. BÖLÜM

### $E^n$ ÖKLİD UZAYINDA YÜZEYLER TEORİSİ

7.1 Dik Koordinat Sisteminde Kapalı Denklem Yardımıyla Hiperyüzey Tanımı .....	602
7.1.1 Hiperyüzeylerde Yönlendirme.....	605
7.1.2 Hiperyüzeyler Üzerinde Geodezik Eğriler .....	605
7.1.3 Hiperyüzeyler Üzerinde Şekil Operatörü (Weingarten Dönüşümü).....	607
7.1.4 Gauss Dönüşümü.....	608
7.1.5 Temel Formlar .....	609
7.1.6 Şekil Operatörünün Cebirsel Değişmezleri.....	609
7.1.6.1 Asli Eğrilikler, Asli Doğrultular .....	609
7.1.6.2 Gauss Eğriliği .....	612
7.1.6.3 Ortalama Eğrilik.....	614
7.1.6.4 Eğrilik Çizgisi (Asli Eğri).....	615

7.1.7 Hiperyüzeylerin Global Özellikleri .....	617
7.1.7.1 Hiperyüzeyler İçin Euler Teoremi .....	618
7.1.8 Dupin Göstergesi .....	620
7.1.9 Hiperyüzeyler Üzerinde Gauss Anlamında Kovaryant Türev .....	621
7.1.10 Bazı Hiperyüzeyler ve Eğrilikler .....	622
7.1.10.1 Hiperdüzlem .....	622
7.1.10.2 Hiperküre.....	624
7.1.10.3 Hipersilindir.....	627
7.2 $E^n$ Öklid Uzayında Parametrik 2-Yüzey.....	629
7.2.1 $E^n$ Öklid Uzayında Regüler 2-Yüzey.....	629
7.2.2 $E^n$ Öklid Uzayında Parametrik 2-Yüzey Üzerinde Fonksiyonlar ve Eğri.....	637
7.2.3 Yüzeyler Üzerinde Eğrilerin Geodezik ve Normal Eğriliği .....	638
7.2.4 $E^n$ Öklid Uzayında Parametrik 2-Yüzeyin Teğet Düzlemi .....	639
7.2.5 $E^n$ Öklid Uzayında Yüzey Üzerinde Metrikler .....	640
7.2.6 Yüzey Dönüşümleri .....	641
7.2.7 $E^n$ Öklid Uzayında Yüzey Alanı .....	646

## 8. BÖLÜM

### MAPLE UYGULAMALARI

8.1 Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar İçin Maple Uygulamaları .....	650
8.1.1 Tanjant Vektörü Yönünde Türev .....	650
8.1.2 Reel Değerli Fonksiyonların Bir Vektör Alanı Yönündeki Türevi.....	652
8.1.3 Bir Vektör Alanının Bir Diğer Vektör Alanına Göre Kovaryant Türevi .....	653
8.1.4 Gradient Fonksiyonu.....	654
8.1.5 Divergens Fonksiyonu.....	655
8.1.6 Rotasyonel Fonksiyon .....	656
8.1.7 Bir Dönüşümün Diferansiyeli .....	657
8.2 Eğriler Teorisi İçin Maple Uygulamalar .....	658
8.3 Yüzeyler İçin Maple Uygulamalar.....	673

<b>Kaynaklar</b> .....	681
------------------------	-----

<b>Dizin</b> .....	685
--------------------	-----