

Genel Matematiksel Kavramlar

Öğrenme Süreçleri ve
Öğretim Yaklaşımları

Doç. Dr. Tangül Uygur Kabael

3. Baskı



Doç. Dr. Tangül Uygur Kabael

GENEL MATEMATİKSEL KAVRAMLAR ÖĞRENME SÜREÇLERİ VE ÖĞRETİM YAKLAŞIMLARI

ISBN 978-605-318-817-9
DOI 10.14527/9786053188179

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2017, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. Ltd. Şti. ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik, kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz, dağıtılamaz. Bu kitap T.C. Kültür Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** ve **Pegemindex.net** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilerle <http://pegem.net> adresinden ulaşabilmektedir.

1. Baskı: Mart 2017, Ankara
3. Baskı: Ekim 2017, Ankara

Yayın-Proje: Özlem Sağlam
Dizgi-Grafik Tasarım: Didem Kestek
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler - Ankara
(0312 341 36 67)
(0535 292 34 31)

Yayıncı Sertifika No: 14749
Matbaa Sertifika No: 25931

İletişim

Karanfil 2 Sokak No: 45 Kızılay / ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50 - 430 67 51
Yayınevi Belgeç: 0312 435 44 60
Dağıtım: 0312 434 54 24 - 434 54 08
Dağıtım Belgeç: 0312 431 37 38
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net

Canım Kızım Birsu, Canım Ođlum Doruk

ve

Sevgili Eşime...

ÖNSÖZ

Matematik öğrenen sevgili öğrencilerimiz, matematik öğrenen değerli öğretmenlerimiz ve matematik öğretecek öğretmen adaylarımız,

Bu kitapta tek değişkenli fonksiyonlar üzerine kurulan genel matematiksel kavramlar yapılandırmacı bir anlayışla ele alınmıştır. Kitapta kavramların yapılandırılması sürecinde ilişkisel öğrenmenin desteklenmesi amacı ile işlemsel örneklerin yanı sıra kavramı mümkün olan çeşitli sınıf düzeylerinde ve çeşitli bağlamlarda yansıtan günlük yaşam problemlerine yer verilmiştir.

Kitapta matematiksel bilgilerin yanı sıra, matematiksel kavramların öğrenilme sürecine, kavram yanlışlarına, öğrenci güçlüklerine ve öğretim stratejilerine de alan yazındaki bazı temel kaynaklar referans alınarak yer verilmiştir. Matematik öğrenen öğrenciler için bu bölümler onlara, sahip olabilecekleri kavram yanlışları, güçlükler ve bunların nedenleri hakkında farkındalık kazandıracak, öğrenmelerini kontrol etmeleri için destekleyecektir. Kavramların pedagojik yönlerine ilişkin bu bölümlerin öğretmenler için ise önemi büyüktür. Matematiksel kavramların yapılandırmacı yaklaşım ışığı altında desenlenecek öğretimi, kavramın zihindeki öğrenilme sürecini yansıtmalıdır. Nitekim en genel itibari ile yapılandırmacı yaklaşım, Piaget'in öğrenme teorisine dayanır. Dolayısı ile öğretmenlerin ve öğretecek olanların kavramların öğrenilme sürecini en genel hatları ile de olsa bilmelerinin gerekliliği ortadadır. Bunun yanı sıra kavramların epistemolojik özelliklerinden kaynaklanan, alan yazına kaydedilmiş öğrenci güçlük ve yanlışlarını bilmek ise öğrenme ortamında bunların teşhisini ve giderilmesini kolaylaştırır. Kavramlara ilişkin öğretim için ise kitaptaki en iyi rehber kavramların kitaptaki yapılandırılma biçimidir. Bunun yanı sıra kavramların öğretimine ilişkin alan yazına kaydedilmiş en temel stratejiler yine pedagojik yönlerle ilişkin bölümlerde verilmiştir. Ayrıca kavramların kitaptaki yapılandırılması sürecinde yapılan uyarılar, kavramın epistemolojisi dolayısıyla sıkça rastlanan kavram yanlışlarının oluşması olasılığına karşı eklenen dikkat çekmeleri içermektedir.

Sonuç olarak bu kitap, matematik eğitiminde uzmanlık eğitimi almakta olan lisansüstü öğrencileri için bir el kitabı, ortaöğretim matematik öğretmenleri için bir kaynak kitap, ortaöğretim ve ilköğretim matematik öğretmen adayları için genel matematik ya da analiz I ve ortaöğretimde özel öğretim yöntemleri gibi derslerde yardımcı bir kaynak olabilecektir.

Tek değişkenli genel matematiksel kavramların öğrenilmesi ve öğretilmesine destek olmak amacı ile hazırlanmış bu kitabın oluşumu aşamasında öğretim şevkimi hep canlı tutmama neden olan başta sevgili lisans öğrencilerime ve kitabın okuyucu ile buluşması gerektiği konusunda beni teşvik eden değerli lisansüstü öğrencilerime teşekkürü borç bilirim. Teşekkürü hak eden diğer yoldaşlarım ise yaşamımın her anında sınırsız desteklerini hiç esirgemeyen sevgili annem ve babam başta olmak üzere her konuda destekçim sevgili eşim ve ortak zamanlarımızdan çaldığım kızım ve oğluma teşekkürlerimi sunarım. Matematik eğitim yaşantısı olan ve olmasını isteyenlere katkıda bulunması dileğiyle....

Doç. Dr. Tangül UYGUR KABAEL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	iv
1. BÖLÜM: FONKSİYONLAR.....	1
1.1 Fonksiyon Kavramı.....	2
1.2 Reel Değerli Tek Değişkenli Fonksiyonlar.....	5
1.2.1 Reel Değerli Fonksiyonların Temsilleri.....	5
1.2.1.1 Cebirsel Temsil.....	5
1.2.1.2 Bağını Temsili.....	5
1.2.1.3 Geometrik Temsil.....	6
1.2.2 Fonksiyonlarda Çeşitli Özellikler.....	7
1.2.2.1 Bire-bir Fonksiyon.....	7
1.2.2.2 Ters Fonksiyon.....	8
1.2.2.3 Örtün Fonksiyon.....	9
1.2.2.4 Artan / Azalan Fonksiyon.....	10
1.2.2.5 Sınırlı Fonksiyon.....	11
1.2.2.6 Periyodik Fonksiyon.....	11
1.2.2.7 Tek / Çift Fonksiyon.....	11
1.2.3 Reel Değerli Fonksiyon Türleri.....	12
1.2.3.1 Polinom Fonksiyonu.....	12
1.2.3.2 Rasyonel Fonksiyon.....	12
1.2.3.3 Kuvvet Fonksiyonu.....	13
1.2.3.4 Üstel Fonksiyon.....	13
1.2.3.5 Logaritmik Fonksiyon.....	14
1.2.3.6 Parçalı Fonksiyon.....	14
1.2.3.7 Mutlak (Salt) Değer Fonksiyonu.....	14
1.2.3.8 Tam Değer Fonksiyonu.....	16
1.2.3.9 İşaret Fonksiyonu.....	17
1.2.3.10 Trigonometrik Fonksiyonlar.....	17
1.2.3.11 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar.....	23
1.2.4 Fonksiyonlar Kümesinde İşlemler.....	27
1.2.4.1 Fonksiyonlar Kümesinde Toplama İşlemi.....	27
1.2.4.2 Fonksiyonlar Kümesinde Çıkarma İşlemi.....	28
1.2.4.3 Fonksiyonlar Kümesinde Çarpma İşlemi.....	28
1.2.4.4 Fonksiyonlar Kümesinde Bölme İşlemi.....	29
1.2.4.5 Fonksiyonlar Kümesinde Bileşke İşlemi.....	29
1.2.5 Bir Fonksiyonun Grafiğinde Ötelemeler.....	31
1.2.5.1 Fonksiyon Grafiğinde Dikey Kaydırma.....	31
1.2.5.2 Fonksiyon Grafiğinde Yatay Kaydırma.....	31
1.3 Çözümlü Fonksiyon Soruları.....	34
1.4 Bölüm Soruları.....	39

2. BÖLÜM: PEDAGOJİK YÖNLERİYLE FONKSİYON KAVRAMI	43
2.1 Fonksiyon Kavramına İlişkin Güçlük ve Yanılgılar	44
2.2 Fonksiyon Kavramının Öğrenilme süreci	46
2.3 Fonksiyon Kavramının Öğretimine İlişkin Öneriler	50
3. BÖLÜM: LİMİT	61
3.1 Limit Kavramı	62
3.2 Dinamik Limit Tanımı	65
3.2.1 Sağ Limit	66
3.2.2 Sol Limit	66
3.3 Formal Limit Tanımı	69
3.4 Sonsuzdaki Limit	77
3.5 Belirsiz Formlar	79
3.6 Çözümlü Limit Soruları	83
3.7 Bölüm Soruları	87
4. BÖLÜM: SÜREKLİLİK	89
4.1 Süreklilik Kavramı	90
4.2 Süreksizlik Tipleri	91
4.3 Sürekliliğin Formal Tanımı	94
4.4 Çözümlü Süreklilik Soruları	97
4.5 Bölüm Soruları	100
5. BÖLÜM: PEDAGOJİK YÖNLERİYLE LİMİT KAVRAMI	103
5.1 limit Kavramına İlişkin Güçlük ve Yanılgılar	104
5.2 Limit Kavramının Öğrenilme Süreci	106
5.3 Limit Kavramının Öğretimine İlişkin Öneriler	110
6. BÖLÜM: TÜREV	113
6.1 Türev Kavramı	114
6.2 Türevin Geometrik Yorumu	116
6.3 Türevlenebilme ve Türev Fonksiyonu	120
6.4 Ters Fonksiyonun Türevi	127
6.5 Trigonometrik FonksiyonlarınTürevi	128
6.6 Ters Trigonometrik FonksiyonlarınTürevi	131
6.7 Bileşke Fonksiyonun Türevi (Zincir Kuralı)	133
6.8 Kapalı Türevler	136
6.9 Üstel Fonksiyonların Türevi	138
6.10 Logaritmik Fonksiyonların Türevi.....	139
6.11 Yüksek Mertebeden Türevler	140
6.12 Çözümlü Türev Soruları	141
6.13 Bölüm Soruları.....	147



7. BÖLÜM: TÜREVİN UYGULAMALARI	151
7.1 Temel Teoremler.....	152
7.2 Ekstremum Değerleri	157
7.3 Yerel Ekstremum Noktalar	158
7.4 Büyüklük.....	163
7.5 Fonksiyon Grafiği İncelemeleri	165
7.6 Belirsiz Formlar İçeren Limitlere Dönüş – L'Hopital Kuralı	170
7.7 Çözümlü Türev Uygulamaları Soruları	171
7.8 Bölüm Soruları.....	177
8. BÖLÜM: PEDAGOJİK YÖNLERİYLE TÜREV KAVRAMI.....	179
8.1 Türev Kavramının Öğrenilmesi ve Kavrama İlişkin Güçlük ve Yanılgılar.....	180
8.2 Türev Kavramının Öğrenilme Süreci.....	182
8.3 Türev Kavramının Öğretimine İlişkin Öneriler	185
9. BÖLÜM: İNTEGRAL	191
9.1 İntegral Kavramı	192
9.2 Riemann İntegrali.....	200
9.3 Diferansiyel İntegral Hesabın Temel Teoremi ve Toplamsal Fonksiyon.....	212
9.4 Diferansiyel-İntegral Hesabın Temel Teoremi ile Hız Problemine Dönüş	216
9.5 İntegral Alma Yöntemleri	217
9.5.1 Değişken Değiştirme	217
9.5.2 Bazı Özel Değişken Değişimleri	218
9.5.3 Kısmi İntegrasyon Yöntemi	220
9.6 Has (Düzensiz) Olmayan İntegraller.....	222
9.6.1 Birinci Tip Has (Düzensiz) Olmayan İntegraller	222
9.6.2 İkinci Tip Has (Düzensiz) Olmayan İntegraller	225
9.7 Çözümlü İntegral Soruları.....	226
9.8 Bölüm Soruları.....	231
10. BÖLÜM: BELİRLİ İNTEGRALIN UYGULAMALARI	235
10.1 Düzlemsel Bir Bölgenin Alanı.....	236
10.2 Yay Uzunluğu	241
10.3 Dönel Yüzey Alanı	245
10.4 Dik Kesitlerle Hacim Hesabı	249
10.5 Çözümlü Belirli İntegral Uygulamaları Soruları	253
10.6 Bölüm Soruları.....	256
11. BÖLÜM: PEDAGOJİK YÖNLERİYLE İNTEGRAL KAVRAMI.....	259
11.1 İntegral Kavramının Öğrenilmesi ve Öğrenci Güçlük ve Yanılgıları.....	260
11.2 İntegral Kavramının Öğretimine İlişkin Öneriler	265
KAYNAKÇA.....	267