Çözümlü Diferansiyel Denklemler

Editör: Prof. Dr. Adnan BAKİ

Yazarlar: Prof. Dr. İhsan ÜNVER • Öğr. Gör. Cemal YAZICI

5. Baskı

PEGEM AKADEMİ

PEGEM AKADEMİ

Editör: Prof. Dr. Adnan BAKİ
Yazarlar: Prof. Dr. İhsan ÜNVER - Öğr. Gör. Cemal YAZICI

ÇÖZÜMLÜ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

ISBN 978-605-318-881-0
DOI 10.14527/9786053188810

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

1. Baskı: Ağustos 2017, Ankara
5. Baskı: Mart 2020, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türlüdür
Dizgi-Grafik Tasarım: Tuğba Kaplan
Kapak Tasarım: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 36306
Matbaa Sertifika No: 25931

İletişim

Karanfil 2 Sokak No: 45 Kızılay/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50 - 430 67 51
Dağıtım: 0312 434 54 24 - 434 54 08
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Prof. Dr. Adnan BAKİ

1960 ylında Tonya'da doğdu. 1978 yılında girdiği Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümünden 1982 yılında mezun oldu. 1985 yılında KTÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak akademik kariyerine başladı. YÖK bursu ile lisansüstü eğitim için yurtdışına gitti. 1990 yılında Kanada'nın New Brunswick Üniversitesinde yüksek lisansını tamamladı. 1994 yılında University of London, Institute of Education'da doktorasını (PhD in Mathematics Education) tamamladı. 1996 yılında Türkiye'nin ilk matematik eğitimi doçenti ve 2004 yılında da profesörü oldu. 1995 yılında KTÜ Fatih Eğitim Fakültesinde başlayan öğretim üyeliği süresince birçok idari görevde bulundu ve 42 doktora çalışmasına danışmanlık yaptı. Ayrıca, 2010-2013 yılları arasında aynı fakültenin dekanı oldu. Matematik eğitimi alanında ulusal ve uluslararası indeksli dergilerde yayınlanmış birçok makalesi yanında 6 kitabı bulunmaktadır. Halen Trabzon Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesinde öğretim üyesi olarak görev yapmaktadır. Evli ve üç çocuk babasıdır.

Prof. Dr. İhsan ÜNVER

1950 yılında Karabük Davutlar Köyü'nde doğdu. İlköğretimini Karabük'te, lise öğrenimini Bolu Öğretmen Okulu ve İzmir Bornova Hazırlık Lisesi'nde tamamladı. 1968 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümünden 1972 yılında mezun oldu. Aynı dönemde Yüksek Öğretmen Okulundan matekatik öğretmeni olarak mezun oldu. 1972-1974 yılları arasında Edirne Erkek Öğretmen Okulu'nda matematik öğretmenliği yaptı. 1974 yılında KTÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümüne asistan olarak girdi. Aynı üniversitede yüksek lisans çalışamasını 1982 yılında ve doktora çalışmasını da 1985 yılında tamamladı. Başta matematik bölümü olmak üzere diğer bölümlerde Genel Matematik, Diferansiyel Denklemler, İstatistik ve Olasılık derslerini okuttu. 1996 yılında doçent oldu. 2003 yılında profesör oldu. 2017 yılında emekli olan Prof. Dr. İhsan Ünver evli ve iki çocuk babasıdır.

Öğr. Gör. Cemal YAZICI

1950 yılında Ardahan Sulakyurt Köyü'nde doğdu. İlkokulu aynı köyde, ortaokulu Şavşat'ta okudu. Artvin Öğretmen Okulu'nda iki yıl okuduktan sonra İstanbul Yüksek Öğretmen Okuluna seçildi. 1971 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Astronomi Bölümü'nde mezun oldu. Mezun olduktan sonra matematik öğretmeni olarak Diyarbakır Lisesi'nde görev yaptı. 1974 yılında Trabzon Fatih Eğitim Enstitüsünde göreve başladı. Fatih Eğitim Enstitüsünde görev yaptığı yıllarda Analiz I, Analiz II, Temel Matematik, Geometri ve Astronomi derslerini okuttu. YÖK Kanunu ile birlikte KTÜ'ye bağlanarak Fatih Eğitim Fakültesi olan aynı kurumda öğretim görevlisi olarak çalışmaya devam etti. 1981-2015 yılları arasında çalıştığı Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Başkanlığında Analiz I ve Analiz II dersleri başta olmak üzere Diferansiyel Denklemler, Toplоloji, Geometri ve Kompleks Analiz derslerini okuttu. 2015 yılında emekli olan Öğr. Gör. Cemal Yazıcı evli ve üç çocuk babasıdır.

ÖN SÖZ

ÇÖZÜMLÜ DİFERANSİYEL DENKLEMLER kitabı Fen, Eğitim ve Mühendislik Fakültelerinin lisans programlarında okutulan Diferansiyel Denklemler dersinin içeriklerine uygun olarak hazırlanan bir kaynak kitap niteliğindedir. Bu çalışma lisans programlarında diferansiyel denklemler dersini okutan Prof. Dr. İhsan Ünver ve Öğr. Gör. Cemal Yazıcı'nın 30 yılı aşkın deneyimlerinin bir ürünü olarak ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla bu kitap çok sayıda çözüm örnekleri içermesi bakımında hem Diferansiyel Denklemler dersini okutan öğretim elemanları için hem de bu dersi alan öğrenciler için kapsamlı bir cevap anahtarı özelliği taşımaktadır.

ÇÖZÜMLÜ DİFERANSİYEL DENKLEMLER kitabı sekiz bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde diferansiyel denklemler hakkında kısa bilgiler verilerek; diferansiyel denklemlerin elde edilişi örneklerle gösterilmiştir.

İkinci bölümde birinci mertebeden birinci dereceden tüm diferansiyel denklemlerin pratik çözüm yolları verilmiş ve bu denklemlere ait yüz elli üç örneğin çözümü yapılmıştır.

Üçüncü bölümde birinci mertebeden yüksek dereceden tüm diferansiyel denklemler pratik çözümleri ile incelenmiş, bu denklemlere ait yetmiş örnek çözülmüştür. Ayrıca bu bölümde birinci mertebeden denklemlerin uygulaması olarak yörüngeler incelenmiş, geometrik yorumlar yapılmış ve fizikteki uygulamalarına ilişkin örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer homojen ve lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri örneklerle incelenmiş, özel çözüm bulma yöntemleri verilerek; bu denklemlere ait kırk tane diferansiyel denklemin çözümü yapılmıştır.

Beşinci bölümde yüksek mertebeden değişken katsayılı tüm denklem türleri sırasıyla örneklerle incelenerek, bu denklemlere ait özel dönüşüm yöntemleri gösterilmiştir. Bu tür denklemlere ait altmış diferansiyel denklemin çözümü yapılmıştır.

Altıncı bölümde lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri çok sayıda örneklerle incelenmiştir.

Yedinci bölümde Laplace ve ters Laplace dönüşümleri temel özellikleri ile incelenmiş, çok sayıda örnekler verilmiş ve alıştırmalar çözülmüştür. Ayrıca Laplace dönüşümleri kullanılarak diferansiyel denklemlerin çözümü yapılmıştır.

Sekizinci bölümde kuvvet serileri kısaca tanıtılarak, adi ve düzgün tekil nokta komşuluğunda diferansiyel denklemlerin seri ile çözümü gösterilmiş, yirmi adet diferansiyel denklemin seri çözümü yapılmıştır. Ayrıca, Bessel, Legendre Gaus diferansiyel denklemlerinin seri ile çözümleri gösterilmiştir.

Editör

İÇİNDEKİLER

Ön Söz..v

1. BÖLÜM
TEMEL BİLGİLER

1.1. Genel Bilgiler 1
1.2. Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi 3

2. BÖLÜM
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1 Değişkenlerine Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler 9
2.2. Homojen Diferansiyel Denklemler 25
2.3. Tam Diferansiyel Denklemler 41
2.4. İntegrasyon Çarpanı 51
2.5. Lineer (Doğrusal) Diferansiyel Denklemler..66
2.6. Bernoulli Diferansiyel Denklemi 76
2.7. Riccati Diferansiyel Denklemi 87
2.8. İkinci Bölümle İlgili Örnek Çözümler 103

3. BÖLÜM
BİRİNCİ MERTEBEDEN YÜKSEK DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

3.1. *y*'ye Göre Polinom Şeklindeki Diferansiyel Denklemler 123
3.2. Clairaut Diferansiyel Denklemi 130
3.3. Lagrange Diferansiyel Denklemi 137
3.4. $F(x,p)=0,G(y,p)=0$ Tipindeki Diferansiyel Denklemler.......................144
3.5. $y=f(x,p),x=g(y,p)$ Tipindeki Diferansiyel Denklemler 146
3.6. Uygulamalar...156
a) Yörüngeler 156
b) Geometrik Yorum..159
c) Fizik Uygulamaları 171

4. BÖLÜM

YÜKSEK MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1. *n.* Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler 179
4.2. *n.* Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemler..........................185

5. BÖLÜM

YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERENSİYEL DENKLEMLER

5.1. Sabit Katsayılı Denkleme Dönüşebilen Denklemler 217
a) Cauchy-Euler Diferansiyel Denklemi 217
b) Legendire Diferansiyel Denklemi...218
c) Özel Bir Dönüşümle Çözülebilen Diferansiyel Denklemler 219
5.2. Değişken Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler...........................233
Homojen Lineer Denklemin Mertebesinin Düşürülmesi 234
5.3. Değişken Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemler..235
5.4. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler...237
İrdeleme...246
5.5. Bağımsız Değişkenin Değiştirilmesi..247
5.6. Bağlı Değişkeni (*y*'yi) Bulundurmayan Diferansiyel Denklemler 248
5.7. Bağımsız Değişkeni (*x*'i) Bulundurmayan Diferansiyel Denklemler 249
5.8. Tam Diferansiyel Denklemler (Sarrus Metodu) 262

6. BÖLÜM

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

6.1. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri 273

7. BÖLÜM

LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

7.1. Laplace Dönüşümleri...287
7.2. Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri 291
7.3. Gamma Fonksiyonu...293
7.4. Ters Laplace Dönüşümü ve Temel Özellikleri..294
7.5. Laplace Dönüşümlerinin Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Kullanılması 301

8. BÖLÜM
SERİ YÖNTEMİYLE DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

8.1. Kuvvet Serileri 315
8.2. Lineer Diferansiyel Denklemlerin Kuvvet Serileri ile Çözümü 317
8.3. Adi Nokta Etrafında Çözüm ve Örnekler 319
8.4. Tekil Nokta Etrafında Çözüm – Frobenius Metodu 328
8.5. Bessel Diferansiyel Denklemler....................338
8.6. Legendre Diferansiyel Denklemi ve Legendre Polinomları....................339
8.7. Gaus Diferansiyel Denkleminin Seri Çözümü ve Örnekler 341

Kaynaklar....................343

1. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad (r \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$

3. $\int sin\,x dx = -cos\,x + c$

4. $\int cos\,x dx = sin\,x + c$

5. $\int sec^2 x dx = tan\,x + c$

6. $\int cosec^2 x dx = -cot\,x + c$

7. $\int sec\,x.\,tan\,x dx = sec\,x + c$

8. $\int cosec\,x.\,cot\,x dx = cosec\,x + c$

9. $\int tan\,x dx = -ln|cos\,x| + c$

10. $\int cot\,x dx = ln|sin\,x| + c$

11. $\int sec\,x dx = ln|sec\,x + tan\,x| + c$

12. $\int cosec\,x dx = ln|cosec\,x - cot\,x| + c$

13. $\int e^x dx = e^x + c$

14. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} + c$

15. $\int sinh\,x dx = cosh\,x + c$

16. $\int cosh\,x dx = sinh\,x + c$

17. $\int sech^2 x dx = tanh\,x + c$

18. $\int cosec\,hx\,coth\,x dx = -cosec\,hx + c$

19. $\int sec\,hx\,tanh\,x dx = +sec\,hx + c$

20. $\int cosec\,hx\,coth\,x dx = -cosec\,hx + c$

21. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctan\frac{x}{a} + c$

22. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

23. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + c$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = arcsin\frac{x}{a} + c$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

26. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + c$

27. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

28. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2 + a^2)} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n},\ (n = 1, 2, \ldots)$

29. $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

30. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

31. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$

32. $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + c$

33. $\int \sin^3 x dx = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 x)\cos x + c$

34. $\int \cos^3 x dx = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 x)\sin x + c$

35. $\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + c$

36. $\int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|\sin x| + c$

37. $\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$

38. $\int \operatorname{cosec}^3 x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x.\cot x + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$

39. $\int \sin ax \sin bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + c$

40. $\int \cos ax \cos bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + c$

41. $\int \sin ax \cos bx dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + c$

42. $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$

43. $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$

44. $\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$

45. $\int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx$

46. $\int sec^n xdx = \frac{1}{n-1} sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int sec^{n-2} xdx$

47. $\int cosec^n xdx = -\frac{1}{n-1} cosec^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1} \int cosec^{n-2} xdx$

48. $\int sin^m x \cos^n x = \frac{sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int sin^m x \cos^{n-2} xdx$

49. $\int x \sin xdx = \sin x - x \cos x + c$

50. $\int x \cos xdx = \cos x + x. \sin x + c$

51. $\int x^n \sin xdx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos xdx$

52. $\int x^n \cos xdx = -x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin xdx$

53. $\int \arcsin xdx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

54. $\int \arccos xdx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$

55. $\int \arctan xdx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$

56. $\int arc \cot xdx = xarc \cot x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$

57. $\int arc \sec xdx = xarc \sec x - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$

58. $\int arccos ecxdx = x arccos ecx + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$

59. $\int x \arcsin xdx = \frac{1}{4}(2x^2-1) \arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + c$

60. $\int x \arctan xdx = \frac{1}{2}(x^2+1) \arctan x - \frac{x}{2} + c$

61. $\int \ln xdx = x \ln x - x + c$

62. $\int x^n \ln xdx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + c$

63. $\int \frac{dx}{x\ln x} = ln|\ln x| + c$

64. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$

65. $\int xe^x dx = (x-1)e^x + c$

66. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

67. $\int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2}$

68. $\int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} + c$

69. $\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + c$

70. $\int \coth x dx = \ln|\sinh x| + c$

71. $\int \mathrm{sech}\, x dx = 2\arctan(e^x) + c$

72. $\int \mathrm{cosech}\, x dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + c$

73. $\int \sinh^2 x dx = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{x}{2} + c$

74. $\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{x}{2} + c$

75. $\int \tanh^2 x dx = x - \tanh x + c$

76. $\int \coth^2 x dx = x - \coth x + c$

77. $\int e^{ax} \cosh bx dx = e^{ax} \frac{a\cosh bx - b\sinh bx}{a^2 - b^2} + c$

78. $\int e^{ax} \sinh bx dx = e^{ax} \frac{a\sinh bx - b\cosh bx}{a^2 - b^2} + c$

79. $\int x^2 + \sqrt{a^2 - b^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + c$

80. $\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 \pm a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

81. $\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 \mp x^2}}{x}\right| + c$

82. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\,\mathrm{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| + c$

83. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2} - arcsin\frac{x}{a} + c$

84. $\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\sqrt{x^2 \pm a^2} + ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

85. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{1}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + c$

86. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^4}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

87. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a} ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right| + c$

88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc\,sec\left|\frac{x}{a}\right| + c$

89. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp -\frac{1}{a^2 x} + \sqrt{a^2 - x^2} + c$

90. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{1}{a^2 x}\sqrt{x^2 \pm a^2} + c$

91. $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + c$

92. $\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} + c$

93. $\int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8}(5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} arcsin\frac{x}{a} + c$

94. $\int (x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8}(2x^2 \pm 5a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} ln\left|x^2 \pm a^2\right| + c$

95. $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

96. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

97. $\int_0^{\pi/2} sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} cos^n x dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\dots\frac{n-1}{n}, \ n = 2, 4, \dots \\ \frac{2}{3}\frac{4}{5}\dots\frac{n-1}{n}, \ n = 3, 5, \dots \end{cases}$

98. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \ n = 1 \\ \frac{1}{2}\frac{3}{4}\dots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{\pi}{2}, \ n = 2, 3, \dots \end{cases}$

1. BÖLÜM

TEMEL BİLGİLER

1.1. Genel Bilgiler

Tanım 1.1: *x* bağımsız değişkeni ile bu değişkene bağlı fonksiyonu ve bu fonksiyonun çeşitli mertebeden türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir.

Bu tanıma göre; *x* bağımsız değişken, *y*, *x*'e bağlı fonksiyon, y'nin türevleri; $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ olmak üzere $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ denklemi n. mertebeden bir diferansiyel denklemdir.

$F\left(x, y, y'\right) = 0$ birinci mertebeden diferansiyel denklemdir.

$F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ ikinci mertebeden diferansiyel denklemdir.

……………..

$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ **n**. mertebeden diferansiyel denklemdir.

Bir diferansiyel denklemin en yüksek mertebeli türevi denklemin mertebesidir. En yüksek mertebeli türevin derecesi de diferansiyel denklemin derecesidir.

$xy' + y + 1 = 0, y' + xy = 0, dy = \left(x^2 + y^2\right)dx, xy' + x^3 y^2 - 4 = 0$ denklemleri 1. mertebeden diferansiyel denklemlerdir.

$y''' + y'' = x^2 + 1$ denklemi 3. mertebeden,

$\dfrac{d^2 u}{dx^2} + x\dfrac{du}{dx} - 3x^2 u = 0$ denklemi 2. mertebeden,

$\dfrac{dv}{dt} \cdot \dfrac{d^3 v}{dt^3} + 3v = 5$ denklemi 3. mertebeden diferansiyel denklemlerdir.

$(y')^2 - y' \sin x - x = 0$ denklemi 1. mertebeden 2. dereceden;

$x(y)''^3 + y'' + y' + y = 0$ denklemi 2. mertebeden 3. dereceden bir diferansiyel denklemdir.

$y'' + y' \tan x = \sin 2x$ denklemi 2. mertebeden diferansiyel denklemdir.

$y^{(n)} + 5y^{(n-1)} + xy''' + y' + y = 0$ denklemi n ci mertebeden 1. dereceden bir diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.2: $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ bir diferansiyel denklem olsun. Bu diferansiyel denklemi sağlayan $y = f(x)$ ifadesine söz konusu diferansiyel denklemin bir çözümü veya integrali denir.

Örnek 1. 1: $y' + y - \sin x - \cos x + 1 = 0$ denklemi verilsin. $y = \sin x - 1$ bu denklemin bir çözümüdür. Gerçekten; $y' = \cos x$ olduğundan $\cos x + \sin x - 1 - \sin x - \cos x + 1 = 0$ olur.

Örnek 1. 2: $y' - x = 0$ denklemi verilsin. *c* keyfi sabit olmak üzere $y = \frac{1}{2}x^2 + c$ ifadesi denklemin genel çözümüdür. Gerçekten; $y' - x = 0 \rightarrow y' = x$ dir. İntegral alınırsa $y = \frac{1}{2}x^2 + c$ olur.

Tanım 1.3: Bir diferansiyel denklemin genel çözümü veya genel integrali bir eğri ailesidir.

$F\left(x, y, y'\right) = 0$ denkleminin genel çözümü (Genel integrali) $G(x, y, c) = 0$ şeklinde bir eğri ailesidir. Burada *c* keyfi sabittir. (c, parametre)

$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ şeklinde bir eğri ailesidir. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ keyfi sabitlerdir.

Örnek 1. 3: $y''' = 1$ ise

$$y'' = x + c_1, y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2, y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \text{ (Genel çözüm)}$$

Bir diferansiyel denklemin genel çözümünden özel bir çözümü bulunabilir. Bunun için keyfi sabitlerin sayısı kadar şart verilmelidir (Başlangıç değer problemi).

Örnek 1. 4: $y'' + y = 0$ denkleminin genel çözümü $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ dir. $y(0) = 0, y'(0) = 1$ için özel çözüm y = sinx dir.

1.2. Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi

$y = f(x, c)$ bir parametreli eğri ailesi olsun.

$\left.\begin{array}{l} y = f(x, c) \\ y' = f'(x) \end{array}\right\}$ Denklemleri arasında c yok edilirse $F\left(x, y, y'\right) = 0$ şeklinde 1. mertebeden diferansiyel denklem elde edilir.

$y = f(x, c_1, c_2)$ iki parametreli eğri ailesi olsun.

$\left.\begin{array}{l} y = f(x, c_1, c_2) \\ y' = f'(x, c_1, c_2) \\ y'' = f''(x, c_1, c_2) \end{array}\right\}$ Denklemleri arasında c_1, c_2 sabitleri yok edilirse $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ şeklinde 2. Mertebeden diferansiyel denklem elde edilir.

$\left.\begin{array}{l} y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ y' = f'(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ y^{(n)} = f^{(n)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{array}\right\}$ Denklemleri arasında $c_1, c_2, \ldots, c_n$ keyfi sabitleri (parametreleri) yok edilirse $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ şeklinde n.ci mertebeden diferansiyel denklem elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Genel çözümü $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$ olan diferansiyel denklemi elde ediniz.

Çözüm:

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$$

$$y' = -\frac{c_1}{x}\sin(\ln x) + \frac{c_2}{x}\cos(\ln x)$$

$$y'' = \frac{c_1}{x^2}\sin(\ln x) - \frac{c_1}{x^2}\cos(\ln x) - \frac{c_2}{x^2}\cos(\ln x) - \frac{c_2}{x^2}\sin(\ln x)$$

$$y'' = \frac{(-1)}{x^2}\left[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)\right] - \frac{1}{x}\left[-\frac{c_1}{x}\sin(\ln x) + \frac{c_2}{x}\cos(\ln x)\right]$$

$$\rightarrow y'' = \frac{-1}{x^2}y - \frac{1}{x}y'$$

$x^2 y'' + xy' + y = 0$ diferansiyel denklemi bulunur.

2. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ eğri ailesinin sağladığı diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

$$y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x}$$

$$y'' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x}$$

$$y''' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + 8c_3 e^{2x}$$

$$\left.\begin{aligned} y'' - y &= 3c_3 e^{2x} \\ y''' - y' &= 6c_3 e^{2x} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y''' - y' = 2\left(y'' - y\right) \\ &y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.