Teori ve Problemleriyle Analiz - I

Hüseyin DEMİR

5. Baskı

PEGEM AKADEMİ

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin DEMİR

TEORİ VE PROBLEMLERİYLE ANALİZ - I

ISBN 978-605-5885-13-7

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarına aittir.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere http://pegem.net adresinden ulaşılabilmektedir.

1. Baskı: Aralık 2015, Ankara
5. Baskı: Ocak 2023, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türlüdür
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Kuyrukcu
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

Bu kitap Eğitim Fakülteleri İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programı'nın ikinci sınıflarında okutulmakta olan "ANALİZ I" dersinin içeriğine göre hazırlanmıştır. Ayrıca Eğitim Fakülteleri İlköğretim Fen Bilgisi Öğretmenliği ve Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Lisans Programı "MATEMATİK I-II" derslerinin konularının ve yine Fen-Edebiyat Fakülteleri Matematik Bölümü "ANALİZ I-II" derslerinin içeriklerini de kapsamaktadır.

Kitapta konularla ilgili kimi tanımlar verilmeden önce, tanımlara anlaşılır bir temel oluşturmak amacıyla, sade örnekler verilmiştir. Sonra, konuyu daha anlaşılır kılmak adına bol örnek çözülmüş, çözümlerde yapılanların nedenleri anlatılarak, mümkün olduğunca grafiklerle ve şekillerle desteklenmiştir.

On ünite olarak düzenlenen kitapta bütün ünitelerde tamamı çözülmüş 680 tane probleme yer verilmiştir. Ayrıca öğrenilenlerin, kalıcı anlaşılırlığını sağlamak adına, 527 tane alıştırma ile desteklenmiştir.

Kitabı hazırlarken hata yapmamaya özen gösterdim. Fakat yine de gözden kaçan hatalar olabileceğini gözardı etmiyorum. Bu tip hatalar için şimdiden özür diliyorum. Hatalardan haberdar eden okuyucularıma teşekkür eder, minnet duygularımı sunarım.

Özellikle kitabın bilgisayarda yazımı için büyük emek harcayan Elif Akbalık Hanımefendi'ye ve baskı hazırlanmasında emeği geçen diğer Pegem Akademi çalışanlarına teşekkür ederim.

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin DEMİR
Amasya Üniversitesi Öğretim Üyesi
ORCID No: 0000-0002-2289-8662

ÜÇÜNCÜ BASKIYA ÖN SÖZ

Bu kitap, Eğitim Fakültelerinin İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği lisans programında okutulmakta olan Analiz 1-2 derslerinin içeriğine uygun olarak hazırlanmıştır. Ayrıca Eğitim Fakültelerindeki Fen Bilgisi Öğretmenliği lisans programında yer alan Genel Matematik 1-2 ve Fen-Edebiyat Fakültelerindeki Matematik Bölümü lisans programında yer alan Analiz 1-2 derslerinin içeriklerine de uygundur.

Kitabımızın bu yeni baskısı, önceki baskılarda gözden kaçan eksiklikler giderilerek özenle hazırlanmıştır. Kitabımızı okurken göreceğiniz eksikleri huseyin.demir@amasya.edu.tr adresine göndererek paylaşırsanız bu görüşlerinin daha sonraki baskılar için dikkate alınacaktır. Şimdiden teşekkür ederim.

Kitabın üçüncü baskıya hazırlanmasında emeği geçen Müge Çetin, Elif Bayrak ve PEGEM Akademi’nin tüm diğer çalışanlarına teşekkür ederim.

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin DEMİR

Amasya Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin DEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin DEMİR, 1955 yılında Iğdır'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Iğdır'da tamamlayarak, 1977 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü bitirdi. 1978 yılında Samsun Çarşamba Lisesi'nde öğretmen olarak göreve başladı. Sonra sırasıyla Bursa Eğitim Enstitüsü (Bursa Eğitim Fakültesi), Bursa İznik Lisesi, Samsun Bafra Lisesi, Samsun Ondokuzmayıs Lisesi'nde görevlerde bulundu. 1992 yılında Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamlayarak, 1994 yılında adı geçen üniversitenin Amasya Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü'ne öğretim görevlisi olarak atandı. 1999 yılında da aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora ihtisasını tamamladı. Halen Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda öğretim üyesi olarak görev yapmaktadır. Yazarın ders kitabı olarak yayınlanmış. ***"OLASILIK"*** *kitabının ikinci baskısı Ekim 2007'de eğitim ve öğretime sunulmuştur.*

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin DEMİR evli ve iki çocuk babasıdır.

İçindekiler

1. Bölüm

GENEL BİLGİLER

(ss:1-47)

2. Bölüm

FONKSİYONLAR

(ss:49-132)

3. Bölüm

TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA LİMİT VE SÜREKLİLİK KAVRAMLARI

(ss:133-185)

4. Bölüm

TÜREV

(ss:187-234)

5. Bölüm

TÜREVİN UYGULAMALARI

(ss:235-309)

6. Bölüm
KUTUPSAL KOORDİNATLAR
(ss:311-326)

7. Bölüm
BELİRSİZ İNTEGRAL
(ss:327-401)

8. Bölüm
BELİRLİ İNTEGRAL
(ss:403-430)

9. Bölüm

BELİRLİ İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

(ss:431-494)

10. Bölüm

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

(ss:495-513)

1. Bölüm

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde bir çok matematik dalının kullandığı bazı temel konuların bir özeti verilecektir. Amaç öğrencinin öğrendiği veya öğrenip unuttuğu bilgileri hatırlatmaktır. Çünkü bu bilgiler yeni öğrenilecek konuların öğrenilmesinde kavramları anlama güçlülüğünü giderme bakımından yol gösterici olacaktır.

1.1 KÜMELER

Matematik sistematiğinde küme kavramı ilk defa George Cantor (1845-1918) tarafından incelenmiştir.

Küme kavramı sosyal ve iktisadi birçok alanda araştırmalarda kullanılmaktadır.

Küme kavramının kesin bir tanımı yapılmamakla beraber, ne olduğu açıklanabilir.

Küme; karakteristik özellikleri iyi tanımlanmış bir takım nesnelerin oluşturduğu bir topluluk olarak tanımlanabilir, öyle ki bu karakteristik özellikler hangi nesnelerin küme içinde hangilerinin dışında kalmasını kesinlikle açıklar.

Kümeyi oluşturan nesnelere kümenin elemanları denir. Kümeler genellikle büyük harflerle A, B, C, X, Y, K, … gibi, elemanları da a, b, c, x, y, … gibi küçük harflerle adlandırılır. Bir x nesnesi A kümesinin elemanı ise $x \in A$ değilse $x \notin A$ sembolleriyle gösterilir.

Verilen bir küme üç biçimde gösterilir.

a) Açık olarak gösterme (Liste Yöntemi): Bu gösterimde $\{...\}$ sembolü kullanılır. Kümeyi oluşturan elemanlar sembol içine aralarına virgül konarak tek tek yazılır.

Örnek 1.1.1. $A = \{a, b, x, y, k\}$

b) Kapalı olarak gösterme (Ortak Özellik Yöntemi): Bu gösterimde kümeyi oluşturan elemanların karakteristik olan özelliklerini temsilen bir bilinmeyen seçilir ve;

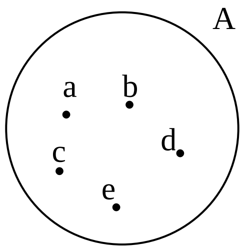
$A = \{ x \mid x\text{'in karakteristik özelliği} \}$

biçiminde gösterilir.

Örnek 1.1.2. $A = \{ x \mid x, \text{Türkiye'nin illeri}\}$

c) Şema ile gösterme (Venn Şeması): Kümeyi oluşturan elemanları kapalı bir bölge içinde kalan noktalar olarak göstermektir.

Örnek 1.1.3.



Tanım 1.1.1. Hiçbir elemanı olmayan küme boş küme diye adlandırılır ve $\varnothing$ sembolü ile gösterilir.

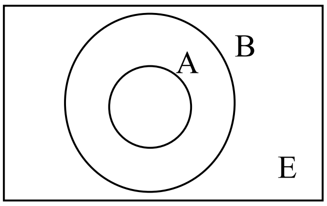
Örnek 1.1.4. $\varnothing = \{x \mid x \in N, x^2 = 2\}$

Tanım 1.1.2. Kümeler teorisinde üzerinde işlemler yapacağımız kümeleri oluşturmak için elemanlar alacağımız en geniş sabit bir kümenin varlığını göz önünde bulunduracağız, bu kümeye <u>evrensel küme</u> denir. Bu küme bütün kümeleri kapsar ve E ile gösterilir.

Tanım 1.1.3. Bir A kümesinin bütün elemanları, B kümesininde elemanları ise A kümesine B kümesinin bir <u>alt kümesi</u> denir ve $A \subset B$ biçiminde gösterilir. Bu tanımı şöyle sembolize ederiz.

$A \subset B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$

Örnek 1.1.5. $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ ise $A \subset B$ dir.



Uyarı: Boş küme her kümenin alt kümesidir.

Tanım 1.1.4. Aynı özdeş elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir. A ve B eşit kümeler ise $A = B$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.6. $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x \mid x^2 = 1,\ x \in Z\}$ kümeleri için $A = B$ dir.

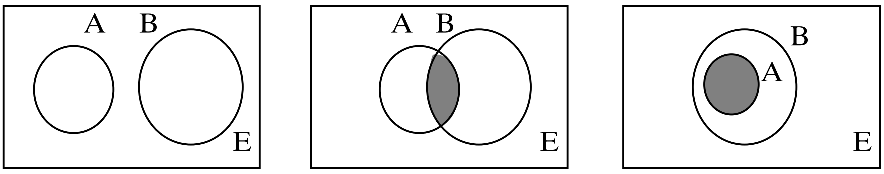
Tanım 1.1.5. Bir kümenin kendinden farklı olan alt kümesine öz alt kümesi denir.

A, B nin öz alt kümesi ise $A \subset B$ fakat $A \neq B$ dir.

Tanım 1.1.6. Verilen A ve B kümelerinin ortak elemanlarının oluşturduğu yeni kümeye bu iki kümenin <u>kesişim kümesi</u> denir. $A \cap B$ ile gösterilir. Buna göre;

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ ve } \ x \in B\}$$

A, B kümelerinin durumuna göre kesişim kümesi aşağıda şekillerde taralı olarak gösterilmiştir.



Kesişimin aşağıdaki özelliklerinin sağlandığı gösterilebilir.

1) $A \cap A = A$

2) $A \cap \emptyset = \emptyset$

3) $A \cap E = A$

4) $A \cap B = B \cap A$

5) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

6) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

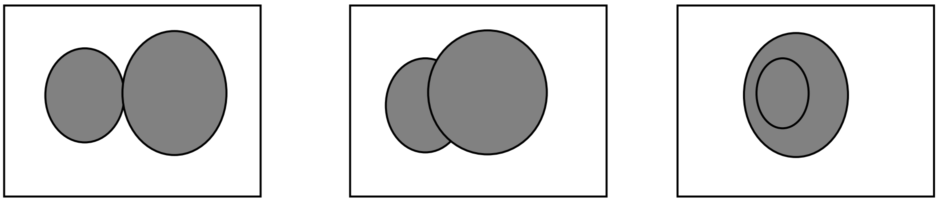
7) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Tanım 1.1.7. A ve B gibi iki kümenin elemanlarının beraberce oluşturduğu kümeye birleşim kümesi denir. $A \cup B$ ile gösterilir ve,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{veya} \quad x \in B\}$$

olarak tanımlanır yani A ve B kümesinden en az birine ait olan elemanların meydana getirdiği küme $A \cup B$ kümesidir.

A ve B kümelerinin durumuna göre birleşim kümesi aşağıdaki şekillerde taralı olarak gösterilmiştir.



Birleşimin aşağıdaki özelliklerinin sağlandığı gösterilebilir.

1) $A \cup A = A$

2) $A \cup \varnothing = A$

3) $A \cup E = E$

4) $A \cup B = B \cup A$

5) $A \subseteq A \cup B,\ \ B \subseteq A \cup B$

6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

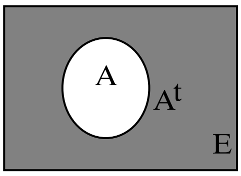
Tanım 1.1.8. Verilen iki kümenin kesişimi boş küme ise bu türden kümelere ayrık kümeler denir. Yani;

$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ A ve B ayrıktır.

Örnek 1.1.7. A = {1, 3, 5}, B = {2, 4, 6, 8} ise $A \cap B = \varnothing$ yani A ve B ayrıktır.

Tanım 1.1.9. E evrensel kümesinin bir alt kümesi olarak A verilsin, E'nin A kümesinde olmayan elemanlarının oluşturduğu kümeye A nın E ye göre tümleyeni denir ve A^t ile gösterilir.

$$A^t = \{x \mid x \notin A \quad \text{ve} \quad x \in E\}$$



Tümleyen ile ilgili şu özellikler kolayca görülebilir.

1) $A \cap A^t = \varnothing$

2) $A \cup A^t = E$

3) $(A^t)^t = A$

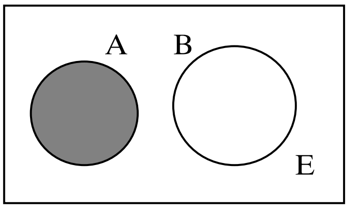
4) $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$

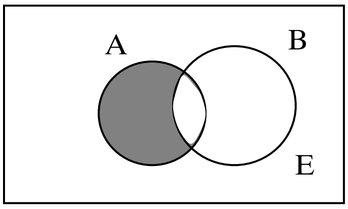
5) $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$

Tanım 1.1.10. A kümesinde bulunup, B kümesinde bulunmayan elemanların oluşturduğu kümeye A nın B ye göre farkı denir ve

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$

biçiminde tanımlanır. A ve B nin durumuna göre A \ B kümesi şekillerde taralı olarak gösterilmiştir.





$A \setminus B = A \cap B^t$

$A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ olduğunu görünüz.

Tanım 1.1.11. A ve B gibi kümenin birleşimlerinin, kesişimine göre farkına A ile B nin simetrik farkı denir ve

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

biçiminde tanımlanır.