

Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Azalması

(Decay of Solutions of Evolution Equations)

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN



Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI
(Decay of Solutions of Evolution Equations)

ISBN 978-625-5964-69-4

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarına aittir.

© 2025, PEGEM AKADEMI

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevidir**. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır; indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 2000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilmektedir.

I. Baskı: Nisan 2025, Ankara

Yayın-Proje: Selcan Durmuş
Dizgi-Grafik Tasarım: Tuğba Kaplan
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Ay-bay Kırtasiye İnşaat Gıda Pazarlama ve Ticaret Ltd. Şti.
Çetin Emeç Bulvarı 1314. Cadde No: 37A-B Çankaya/ANKARA

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 46661

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi
Macun Mahallesi 204 Cad. No: 141/33, Yenimahalle/Ankara
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: yayinevi@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Ön söz

Diferansiyel denklemler; fen, mühendislik ve tıp gibi birçok alanda ortaya çıkan problemlerin matematiksel modellemesinde önemli bir rol oynar. Değişkenlerinden biri t zaman değişkeni olan diferansiyel denklemlere özel olarak evölüsyon denklemler denir. Isı akışı, dalgaların yayılması, bulaşıcı hastalıkların yayılımı, kuantum mekaniği, nükleer fizik, akışkanlar dinamiği, mekanik, elektromanyetizma, giriş teorileri ve roket hareketleri gibi birçok olay bu tür denklemlerle modellenenir. Bu denklemlerin çözümlerinin bulunması büyük önem taşırken, bazen çözümlerin kendisinden ziyade, çözümlerin davranışını incelemek daha kritik hale gelir. Çözüm var mı, tek mi, kararlı mı, asimptotik davranışı nasıl, patlama meydana gelir mi, periyodik mi, azalır mı? gibi sorular, bu tür denklemlerle ilgili temel araştırma konularıdır. Bu nedenle denklemlerin çözümlerinin azalması (decay) ile ilgili bu eser ortaya çıkmıştır.

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır: Birinci bölüm; ön bilgilere, ikinci bölüm; çözümlerin azalması ile ilgili kavram ve bazı temel örneklere ayrılmıştır. Diğer bölümlerde ise çözümlerin azalması ile ilgili eşitsizlikler anlatılmış ve bunların bazı denklemlere uygulanması verilmiştir. Ayrıca her bölümün sonuna bölüm ile ilgili kısa bir referans bilgisi verilmiştir. Dolayısıyla okuyucunun istediği metot ile ilgili daha detaylı araştırma yapmasının önü açılmıştır. Kitapta ayrıca iki ek bölüm bulunmaktadır: Ek 1 de bazı önemli diferansiyel denklemlerin modellenmesi ve uygulama alanları verilmiştir. Ek 2 de ise diferansiyel denklemlerdeki enerji kavramı ile fizikteki enerji kavramı arasındaki ilişki verilmiştir.

Bu eser lisansüstü seviyede verilen Evölüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Azalması, Diferansiyel Denklemler Teorisi, Doğrusal Olmayan Kısmi Türevli Denklemler gibi derslerde yardımcı kaynak olarak kullanılabilir.

Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Azalması ile ilgili Türkçe olarak yazılan ilk eser olması nedeniyle bazı eksik ve yanlışlıklar bulunabilir. Bu konuda her türlü eleştiri ve öneriyi memnuniyetle karşılayacağımı belirtmek isterim. Faydalı olması dileğiyle...

Erhan PİŞKİN
episkin@dicle.edu.tr

İÇİNDEKİLER

Ön söz.....	iii
1.Bölüm: Ön Bilgiler.....	1
2.Bölüm: Çözümlerin Azalması.....	13
Adi Diferansiyel Denklemlerde Çözümlerin Azalmasına Örnekler.....	14
Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Çözümlerin Azalmasına Örnekler.....	16
Lineer Isı Denkleminin Çözümünün Azalması.....	16
Lineer Olmayan Isı Denkleminin Çözümünün Azalması.....	17
3.Bölüm: Doğrudan (Direk) Metot.....	21
Uygulama 1: Sönüm Terimli Bir Dalga Denkleminin Enerji Azalması.....	22
Uygulama 2: Dördüncü Mertebeden Bir Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemin Enerji Azalması.....	27
Uygulama 3: Sönüm Terimli Kirchhoff Tipli Bir Denklemin Çözümlerinin Azalması.....	33
Uygulama 4: Lineer Olmayan Bir Denklemin Çözümlerinin Azalması.....	41
4.Bölüm: Nakao Eşitsizliği.....	49
Uygulama 1: Sönüm Terimli Bir Dalga Denkleminin Enerji Azalması.....	51
Uygulama 2: Lineer Olmayan Dördüncü Mertebeden Denklemin Çözümlerinin Azalması.....	58
Uygulama 3: Diverjans Terimli Bir Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemin Çözümlerinin Azalması.....	66
5. Bölüm: Komornik Eşitsizliği.....	81
Uygulama 1: Lineer Olmayan Dalga Denkleminin Çözümlerinin Azalması.....	85
Uygulama 2: Yüksek Mertebeden Parabolik Tipten Bir Kirchhoff Denkleminin Çözümlerinin Global Varlığı ve Enerji Azalması.....	91

Uygulama 3: Gecikmeli Terim İçeren p-Laplasyen Denkleminin Çözümlerinin Azalması.....	101
Uygulama 4: Güçlü ve Doğrusal Olmayan Sönüm Terimli Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Global Varlığı ve Azalması.....	113
6. Bölüm: Genelleştirilmiş Komornik Eşitsizliği....	125
Uygulama 1: Değişken Katsayılı Gecikme Terimli Petrovsky Denkleminin Çözümlerinin Azalması.....	126
Uygulama 2: Viskoeelastik Terim İçeren Parabolik Tipten Kirchhoff Denkleminin Enerji Azalması.....	138
7. Bölüm: Genel Enerji Azalması.....	147
Uygulama 1: Viskoelastik Terimli Bir Denklemin Çözümlerinin Azalması.....	147
Uygulama 2: Dejenere Sönüm Terimli Kirchhoff Tipli Viskoelastik Denklem Sisteminin Çözümlerinin Azalması.....	161
Ek 1: Bazı Önemli Denklemler.....	185
Ek 2: Enerji Formülü.....	211
Kaynaklar.....	215

1. BÖLÜM

Ön Bilgiler

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı temel kavramlar kısaca verilmiştir (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Pişkin, 2025).

$L^p(\Omega)$ Uzayları

Tanım. Ω , R^n de ölçülebilir bir bölge, u ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p . kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır, ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu şartı sağlayan tüm u fonksiyonlarının uzayına L^p Lebesgue uzayı denir. Burada L^p uzayının elemanları $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfıdır.

Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı bu norm ile bir Banach uzayıdır.

Not. $L^p(\Omega)$ uzayında

- i. $p = 1$ alınırsa $L^1(\Omega) = L(\Omega)$ integrallenebilir fonksiyonlar uzayı,
- ii. $p = 2$ alınırsa $L^2(\Omega)$ karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır.

Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem. $a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p)$$

dır.

Teorem (Young Eşitsizliği). $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dır.

Not. $\delta > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Young eşitsizliğinde $a = \delta X$ ve $b = \frac{Y}{\delta}$ alınırsa

$$XY \leq \frac{\delta^p X^p}{p} + \frac{\delta^{-q} Y^q}{q}$$

eşitsizliği elde edilir.

Not (ε lu Young Eşitsizliği). Young eşitsizliğinde $a = (\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} X$ ve $b = \frac{Y}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}}$ alınırsa

$$XY \leq \varepsilon X^p + C(\varepsilon) Y^q$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dir.

Teorem (Hölder Eşitsizliği).

$1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır.