ÖABT 2025

HİBRİT KİTAP

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

MEB-AGS ÖABT

LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

ANALİZ - DİFERANSİYEL DENKLEMLER

KONU ANLATIMLI

e-Kitaba, video derslere ve kitabın baskı tarihinden sonraki güncellemelere erişebilmek için QR kodu okutunuz.

Fiziksel Kitap | HİBRİT KİTAP | e-Kitap

Video Ders Hediyeli

PEGEM AKADEMİ

Komisyon

MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Analiz Diferansiyel Denklemler Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6128-13-2

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi
Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

1. Baskı: 2025, Ankara

Proje-Yayın: Pegem
Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya
Kapak Tasarımı: Pegem

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.
No: 141/33, Yenimahalle/Ankara
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: yayinevi@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 47865

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği 1. Kitap" adlı yayınımız Analiz ve Diferansiyel Denklemler bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB - AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı yayinevi@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi

Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Detaylı anlatım için QR kodu okutunuz.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:

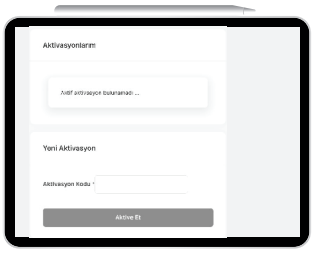
1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.

2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan **“Aktivasyonlarım”** sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.

Yırtmayınız
Kazıyınız



3. Adım Ürünlerim

“Hibrit Kitap” sekmesinden kitabınızın konu anlatımına ve video derslere,
“Ölçme İstasyonu” sekmesinden konu sonu testlerine erişim sağlayabilirsiniz.

Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2025 tarihine kadar geçerlidir.

Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

1. KISIM

1. BÖLÜM – POLİNOMLAR

POLİNOMLAR 1
- İki Polinom Eşitliği 1
- Sabit Terim 1
- Katsayılar Toplamı 2
- Polinom Derecesiyle İlgili Özellikler 2
- Polinomlarda Kalan Bulma 2

2. BÖLÜM – İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER 14
- Kökler Ve Katsayılar Arasındaki Bağlantılar 14
- Kökleri Bilinen İkinci Derece Denklemin Yazılması 14
- Karmaşık Sayılar 15
- İ Sayısının Kuvvetleri 15
- Karmaşık Sayıların Eşitliği 15
- Karmaşık Sayıların Eşleniği 15
- İkinci Dereceden Denklemin Karmaşık Kökleri 15
- İkinci Dereceye Dönüştürülebilen Denklemler Ve Denklem Sistemleri 16

3. BÖLÜM – PARABOL

PARABOL 27
- İki Parabolün Birbirine Göre Durumları 28
- Bir Doğru İle Bir Parabolün Durumları 28

4. BÖLÜM – EŞİTSİZLİKLER

EŞİTSİZLİKLER 48
- İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Köklerinin Varlığı Ve İşareti 48

5. BÖLÜM – TRİGONOMETRİ

TRİGONOMETRİ 53
- Açı Ölçü Birimleri 53
- Trigonometrik Fonksiyonlar 53
- Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri 53
- Trigonometrik Özdeşlikler 54
- Geniş Açıların Trigonometrik Oranları 54
- Dik Üçgende Dar Açilarin Trigonometrik Oranları 55
- Kosinüs Teoremi 55
- Sinüs Teoremi 55
- Üçgenin Alanı 55
- Ters Trigonometrik Fonksiyonlar 56
- Periyodik Fonksiyonlar 56
- Toplam Ve Fark Formülleri 57
- İki Kat Açı Formülleri 57
- Trigonometrik Denklemler 57

6. BÖLÜM – LOGARİTMA
- Üstel Fonksiyon 83
- Logaritma Fonksiyonu 83
- Logaritma Fonksiyonunun Grafiği 83
- Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri 84
- Logaritmalı Denklem Ve Eşitsizlikleri 85

7. BÖLÜM FONKSİYONLAR

FONKSİYONLAR 101

FONKSİYON ÇEŞİTLERİ 102
- Birebir fonksiyon 102
- Örten fonksiyon 103
- İçine fonksiyon 104
- Sabit fonksiyon 104
- Tek ve Çift fonksiyon 104
- Birim fonksiyon 105
- Ters fonksiyon 105
- Bileşke fonksiyon 105
- Bileşke fonksiyonun Özellikleri 105

ALIŞILMIŞ FONKSİYON TÜRLERİ 106
- Kuvvet fonksiyonları 106
- Polinom fonksiyonlar 106
- Rasyonel fonksiyonlar 106

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR
PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR 107
MUTLAK DEĞER FONKSİYONU 107
MUTLAK DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER VE DENKLEMLER 109
SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONU 111
İŞARET FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ 112
TAM DEĞER VE TAM DEĞER FONKSİYONU 113
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ 113
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN GRAFİKLERİ 116
FONKSİYONLARIN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ 117
FONKSİYON GRAFİKLERİNDE ÖTELEMELER 118
8. BÖLÜM LİMİT
LİMİT 124
SAĞ – SOL LİMİT 124
GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ 126
LİMİT İLE İLGİLİ TEOREMLER 127
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ 128
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN LİMİTİ 129
SİGNUM FONKSİYONUNUN LİMİTİ 130
TAM DEĞER FONKSİYONLARININ LİMİTİ 131
BELİRSİZ DURUMLAR 0/0 BELİRSİZLİĞİ 133
TRİGONOMETRİK 0/0 BELİRSİZLİĞİ 134
∞/∞ BELİRSİZLİĞİ 135
∞–∞ BELİRSİZLİĞİ 137
0 · ∞ BELİRSİZLİĞİ 138
ÜSLÜ, ÜSTEL BELİRSİZLİKLERİN ∞/∞ FORMU 139
SÜREKLİLİK 140
SÜREKLİLİK TEOREMLERİ 140
SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ 141
Kaldırılabilir Süreksizlik 141
Sıçrama Süreksizliği 141
Sonsuz Süreksizliği 141
Balzano Teoremi 141
DÜZGÜN SÜREKLİLİK 143
9. BÖLÜM TÜREV
TÜREV 150
SAĞ–SOL TÜREV 151
LİMİT – SÜREKLİLİK – TÜREV İLİŞKİSİ 151
TÜREV ALMA KURALLARI 152
YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER 166
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ 168
Parçalı Fonksiyonların Türevi 168
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ 169
SİGNUM FONKSİYONUNUN TÜREVİ 170
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ 170
TÜREVİN UYGULAMALARI 180
L'Hospital Kuralı 180
ÜSTEL BELİRSİZLİKLER 183
1^{∞}, 0^0, ∞^0 Belirsizlikleri 183
TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU 185
POLİNOM – TÜREV İLİŞKİSİ 186
DİFERANSİYEL UYGULAMALARI 186
MAKSİMUM – MİNİMUM PROBLEMLERİ 187
Maksimum – Minimum Problemlerinde Kullanılabilecek Kısayollar 190
TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU 194
Teğet – Eğim – Türev İlişkisi 194
ARTAN – AZALAN FONKSİYONLAR 199
YEREL EKSTREMUM DEĞERLER 202
Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum Noktası 203
TÜREV – EKSTREMUM İLİŞKİSİ 203
Grafikte Maksimum ve Minimum Nokta Yorumu 205
TÜREVLENEBİLİR BİR FONKSİYONUN EĞRİLİK YÖNÜ 206

ASİMPTOT KAVRAMI 211
Düşey Asimptot 211
Yatay Asimptot 212
Eğik-Eğri Asimptot 213
FONKSİYONUN GRAFİKLERİ 215
TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER 215
10. BÖLÜM İNTEGRAL
BELİRSİZ İNTEGRAL 231
TEMEL İNTEGRAL ALMA KURALLARI 232
İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ 237
A) Değişken Değiştirme Yöntemi 237
ÖZEL DÖNÜŞÜMLER 240
$\sqrt{a^2 - x^2}$ İfadesini İçeren İntegraller 240
$\sqrt{x^2 - a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller 241
$x^2 + a^2$ ve $\sqrt{x^2 + a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller 241
RASYONEL (KESİRLİ) İFADELERİN İNTEGRALİ 242
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ 246
İndirgeme Bağıntıları 248
B) Kısmi İntegrasyon Yöntemi 248
BELİRLİ İNTEGRAL 254
Riemann İntegrali 254
İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMLERİ 256
Belirli İntegrallerin Özellikleri 256
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ 261
İNTEGRALDE ALAN 263
İNTEGRALDE HACİM 264
Kabuk Yöntemi 269
Eğri Uzunluğu Hesabı 272
Dönel Yüzeyin Alanı 274
Pappus – Guldin Teoremi 275
11. BÖLÜM DİZİLER – SERİLER
DİZİ 278
Sonlu Dizi 278
Sabit Dizi 278
EŞİT DİZİLER 279
ALT DİZİ 279
DİZİLERDE DÖRT İŞLEM 280
DİZİLERDE SINIRLILIK 281
DİZİLERDE MONOTONLUK 281
ARİTMETİK VE GEOMETRİK DİZİLER 282
Aritmetik Dizi 282
Geometrik Dizi 283
DİZİLERDE LİMİT 284
Dizilerde Limit ile İlgili Özellikler 286
Dizilerde En Büyük Alt Sınır (Ebas) – En Küçük Üst Sınır (Eküs) Kavramları 287
SERİLER 288
Geometrik Seri 290
Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testleri 293
Genel Terim Testi 293
İntegral Testi 293
p – Testi 294
Karşılaştırma Testi 294
Karşılaştırma Testinin Limit Formu 294
Cauchy – Kök Testi 295
D'alambert Oran Testi 296
Limit Testi 297
Alterne Seriler 297
Mutlak Yakınsaklık – Yakınsaklık İlişkisi 297
KUVVET SERİLERİ 298
Yakınsaklık Yarıçapı 298
Yakınsaklık Aralığında Türevlenebilme ve İntegrasyon 299
Taylor ve Maclaurin Serileri 300
Önemli Maclaurin Seri Açılımları 301

12. BÖLÜM ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR
TANIM VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ 315
Seviye Eğrileri 318
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik 318
Süreklilik 321
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Türev (Kısmi Türev) 321
Çok Değişkenli Fonksiyonların 2. Türevi 323
Zincir Kuralı 324
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Teğet Düzlem Denklemi 324
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA MAKSİMUM–MİNİMUM 325
Yerel Maksimum 325
Yerel Minimum 325
Kritik Nokta – Eyer Nokta 326
Kritik Nokta İçin 2. Türev Testi 326
Maksimum–Minimum Problemleri 328
Kapalı Fonksiyonun Türevi 328
ÇÖZÜMLÜ TESTLER 330

2. KISIM

13. BÖLÜM DİFERANSİYEL DENKLEMLER
DİFERANSİYEL DENKLEMLER 424
Diferansiyel Denklemlerin Çözümü 425
Genel ve Özel Çözümler 426
Varlık ve Teklik Teoremi 427
Bir Eğri Ailesinin Diferansiyel Denkleminin Oluşturulması 428
DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR DENKLEMLER 430
DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR HÂLE GETİRİLEBİLEN DENKLEMLER 432
HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER 433
Homojen Diferansiyel Denklemlerin Çözümü 433
HOMOJEN HÂLE DÖNÜŞTÜRÜLEBİLİR DİFERANSİYEL DENKLEMLER 434
TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER 436
İNTEGRASYON ÇARPANI YARDIMI İLE DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ 438
İntegrasyon Çarpanını Bulma 438
LİNEER DENKLEMLER 440
Lineer Diferansiyel Denklemin Çözüm Yöntemi 440
BERNOULLİ DENKLEMLERİ 442
RİCCATİ DENKLEMİ 443
BİRİNCİ MERTEBEDEN n. DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER 448
Türeve, x'e veya y'ye Göre Çözülebilen Denklemler 448
Türeve Göre Çözülebilen Denklemler 448
x'e Göre Çözülebilen Denklemler 449
y'ye Göre Çözülebilen Denklemler 449
CLAİRAUT DENKLEMİ 450
LAGRANGE DENKLEMİ 451
İNDİRGENEBİLİR 2. MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER 452
YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER 454
3. Mertebeden Homojen Olmayan Lineer Denklem 454
Mertebe İndirgeme 455
Sabit Katsayılı Denklemler 456
Farklı Reel Kökler 456
Katlı Reel Kökler 457
Kompleks Kök 457
Homojen Olmayan (2. Yanlı) Lineer Diferansiyel Denklemler 460
Belirsiz Katsayılar Yöntemi 460
PARAMETRELERİN DEĞİŞİM YÖNTEMİ 464
CAUCHY – EULER DENKLEMİ 466
ÇÖZÜMLÜ TESTLER 472

POLİNOMLAR

$n \in \mathbb{N}$ $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ ve x değişken olmak üzere,

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

ifadesine **gerçek katsayılı tek değişkenli polinom** denir.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinomunda,

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ katsayılardır.
- a_n baş katsayısıdır. (Derecesi en büyük olan terimin katsayısıdır.)
- a_0 sabit terimdir. (x'i içermeyen ifadedir.)
- P(x) polinomunun derecesi der[P(x)] ile gösterilir ve bu polinom da der[P(x)] = n'dir. (x'in en büyük doğal sayı kuvvetidir.)
- $a_0 \neq 0$ olmak üzere, $P(x) = a_0$ polinomuna **sabit polinom** denir ve sabit polinomun derecesi sıfırdır.
- P(x) = 0 polinomuna **sıfır polinom** denir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

Örnek

$P(x) = 7x^4 + 6x^5 + 3x^2 + 2x - 1$ polinomunda,

Katsayılar	→	7, +6, 3, 2, –1
Derece	→	der[P(x)] = 5

Baş katsayı	→	6
Sabit terim	→	–1

Örnek

$R(x) = x^4 + 2x^{n-2} + x^{\frac{18}{n}} + 1$

ifadesi bir polinom olduğuna göre, n'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

R(x)'in polinom olması için x'in kuvvetleri doğal sayı olmalıdır.

$\frac{18}{n} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n = 1, 2, 3, 6, 9, 18 \ldots$ **(i)**

$n - 2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n - 2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 2$ ....**(ii)**

(i) ve (ii) den

n = 2, 3, 6, 9, 18 olur.

Toplamları

= 2 + 3 + 6 + 9 + 18

= 38 bulunur.

Örnek

$P(x) = (a - 5)x^2 + (a + 2b + 1)x + 4$ polinomu sabit polinom ve $R(x) = (m + 4)x + n - 6$ polinomu sıfır polinom olduğuna göre, a + b + m + n toplamı kaçtır?

P(x) sabit polinom ise
- $a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5$'tir.
- $a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 5 + 2b + 1 = 0$
  $\Rightarrow 2b = -6$
  $\Rightarrow b = -3$'tür.

R(x) sıfır polinom ise
- $m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4$'tür.
- $n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6$'dır.

O hâlde, $a + b + m + n = 5 - 3 - 4 + 6 = 4$ bulunur.

NOT

Sıfır polinomda bütün katsayılar ve sabit terim sıfıra eşitlenirken sabit polinomda sadece değişkenin katsayıları sıfıra eşitlenir.

R(x) sıfır polinom ise
- $m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4$'tür.
- $n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6$'dır.

O hâlde, $a + b + m + n = 5 - 3 - 4 + 6 = 4$ bulunur.

İki Polinom Eşitliği

P(x) ve Q(x) gibi iki polinomun dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerin katsayıları da birbirine eşit ise P(x) ile Q(x) polinomlarına **eşit polinom** denir ve P(x) = Q(x) şeklinde gösterilir.

Sabit Terim

Bir polinomun sabit terimi bulunurken verilen polinomda değişken yerine 0 (sıfır) yazılır.

P(x) polinomunun sabit terimi: P(0)

P(x + 1) polinomunun sabit terimi: P(1)

P(x – 3) polinomunun sabit terimi: P(–3)

NOT

Soruda hangi polinomun "sabit terimi" ve "katsayılar toplamı" sorulduğuna dikkat etmeliyiz.

Katsayılar Toplamı

Bir polinomunun katsayılar toplamı bulunurken verilen polinomda değişken yerine 1 yazılır.

- P(x) polinomunun katsayılar toplamı: P(1)
- P(x + 1) polinomunun katsayılar toplamı: P(2)
- P(x – 3) polinomunun katsayılar toplamı: P(–2)
- P(x) polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı: $\frac{P(1)+P(-1)}{2}$'dir.
- P(x) polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamı: $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$'dir.

Örnek

$$\frac{3x+1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

olduğuna göre, A · B çarpımını bulalım.

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}_{(x+1)}+\frac{B}{x+1}_{(x-1)}$$

3x + 1 = Ax + A + Bx – B

A + B = 3 ve A – B = 1'dir.

$$\begin{array}{r} A+\cancel{B}=3 \\ +\quad A-\cancel{B}=1 \\ \hline \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 2A=4 \\ A=2 \text{ ve } B=1\text{'dir.} \\ \textbf{A · B = 2 bulunur.} \end{array}\right.$$

P(x) bir polinom olmak üzere, P(a) = 0 eşitliğini sağlayan a değerlerine P(x) polinomunun kökleri (veya sıfırları) denir.

Örnek

P(x + 1) = x^2 – 6x + m polinomu veriliyor.

P(x – 2) polinomunun katsayılar toplamı 18 olduğuna göre, P(x) polinomunun sabit terimini bulalım.

P(x – 2) polinomunun katsayılar toplamı:

P(–1) = 18'dir.

x = –2 için P(–1) = 4 + 12 + m = 18

16 + m = 18

m = 2'dir.

P(x) polinomunun sabit terimi P(0) = ?

x = –1 için P(0) = 1 + 6 + 2 = 9 bulunur.

Örnek

P(x) bir polinom olmak üzere,

P(x + 3) + P(2x – 1) = 9x + 12

olduğuna göre, P(5) değerini bulalım.

P(x) = ax + b olsun.

P(x + 3) = ax + 3a + b ve P(2x – 1) = 2ax – a + b olur.

ax + 3a + b + 2ax – a + b = 9x + 12

⇒ 3ax + 2a + 2b = 9x + 12 (İki polinomunun eşitliğinden)

⇒ 3a = 9 ve 2a + 2b = 12

⇒ a = 3 2b = 6 ⇒ b = 3

⇒ P(x) = 3x + 3 ⇒ P(5) = 15 + 3 = 18 bulunur.

Soruda iki polinomun toplamı 1. dereceden bir polinoma eşit ise P(x) = ax + b şeklinde seçilmelidir.

Polinomun Derecesi ile İlgili Özellikler

der[P(x)] = a, der[Q(x)] = b ve a > b olmak üzere,

✓ der[P(x) ∓ Q(x)] = a	✓ $\text{der}\left[P^n(x)\right]=n\cdot a$
✓ der[P(x) · Q(x)] = a + b	✓ $\text{der}\left[P(x^n)\right]=n\cdot a$
✓ $\text{der}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]=a-b$	✓ $\text{der}\left[P(Q(x))\right]=a\cdot b$

Polinomlarda Kalan Bulma

✓ P(x) polinomunun x – a ile bölümünden kalanı bulmak için x yerine a yazılır.

→ P(x) polinomunun (x – 3) ile bölümünden kalan P(3) değeridir.

→ P(x – 1) polinomunun (x + 2) ile bölümünden kalan P(–3) değeridir.

✓ P(x) polinomunun x^n – a ile bölümünden kalanı bulmak için x^n yerine a yazılır.

✓ P(x) polinomunun x^2 + ax + b ile bölümünden kalanı bulmak için x^2 yerine –ax – b yazılır.

Örnek

P(x) ve Q(x) iki polinom olmak üzere, der $\left[P^2(x)\cdot Q(x)\right]=21$ ve $\text{der}\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right]=6$

olduğuna göre, der[P(Q(x))] kaçtır?

$$\left.\begin{array}{l}\text{der}[P(x)]=a\\ \text{der}[Q(x)]=b\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{der}\left[P^2(x)\cdot Q(x)\right]=21\\ \text{der}\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right]=6\end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 2a+\cancel{b}=21\\ + & a-\cancel{b}=6\\ \hline & 3a=27\Rightarrow a=9 \text{ ve } b=3 \text{ olur.}\end{array}$$

$\text{der}\left[P(Q(x))\right]=9\cdot 3=27$ bulunur.

Örnek

$P(x+1)=x^2+5x+a-3$ polinomu veriliyor.

P(x + 2) polinomunun (x – 1) ile bölümünden kalan 15 olduğuna göre, a kaçtır?

$x-1=0\Rightarrow x=1$'dir.

$x=1$ için $P(3)=15$ olur.

$x=2$ için $P(3)=4+10+a-3=15$

$a+11=15\Rightarrow a=4$ bulunur.

Örnek

$P(x)=x^{12}-2x^8+3x^5-x^4+x^2$ polinomunun x^4+1 ile bölümünden kalanı bulalım.

$x^4+1=0\Rightarrow x^4=-1$'dir.

$P(x)=\left(x^4\right)^3-2\left(x^4\right)^2+3\left(x^4\right)\cdot x-x^4+x^2$

$=(-1)^3-2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)\cdot x-(-1)+x^2$

$=\cancel{-1}-2-3x\cancel{+1}+x^2=x^2-3x-2$ bulunur.

Örnek

- $P(x)=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{4}{x}$
- $Q(x)=\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2+4$
- $R(x)=x-6$
- $S(x)=0$
- $K(x)=x^3+2^x$

Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi polinom belirtir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm

Polinom belirtebilmesi için derecesinin doğal sayı olması gerekir.

$P(x)=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{4}{x}=\dfrac{x^2}{16}+4\cdot x^{-1}(-1\notin N)$ (polinom değildir.)

$Q(x)=\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2+4=\left(x-2\cdot x^{-1}\right)^2+4$ (polinom değildir.)

$R(x)=x-6$ polinomdur.

$S(x)=0=0\cdot x^0$ polinomdur.

$K(x)=x^3+2^x$ polinomdur.

3 tanesi polinomdur.

Cevap C

Örnek

$P(x)=x^{m-5}+x^{\frac{12}{m}}+7$

ifadesinin polinom belirtmesi için m'nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm

P(x) polinom ise $m-5$ ve $\dfrac{12}{m}$ doğal sayı olmalıdır. İkisini aynı anda doğal sayı yapan değer 6, 12 olmak üzere 2 tanedir.

Cevap E

Örnek

$P(x) = 2x^{7-n} + 3x^{n-2} + x^{\frac{12}{n}}$

polinomunun derecesi en çok kaç olabilir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm

P(x) polinom ise 7 – n, n – 2 ve $\frac{12}{n}$ doğal sayı olmalıdır.

n = 2 için polinomun derecesi en fazla olur.

$d[P(x)] = \frac{12}{2} = 6$ olacaktır.

Cevap E

Örnek

m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$K(x) = (x + 2m) \cdot (x + 2n)$

polinomunun katsayılar toplamı 55 olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm

x = 1 için

$K(1) = (1 + 2m) \cdot (1 + 2n) = 55$

ise $1 + 2m = 5$ ve $1 + 2n = 11$

$m = 2$ ve $n = 5$ olur.

Toplamları ise 7 olur.

Cevap A

Örnek

$P(x + 1) = x^2 - 5x + 3$ polinomu veriliyor.

Buna göre, P(x – 1) polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 5 D) 11 E) 17

Çözüm

P(x – 1) polinomunun sabit terimini bulmak için x yerine sıfır yazılır.

$P(\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x - 1}) = P(-1)$'i bulmak gerekir.

P(x + 1) polinomunda x yerine – 2 yazılırsa P(–1) bulunur.

$P(\underset{\substack{\downarrow \\ -2}}{x} + 1) = \underset{\substack{\downarrow \\ (-2)^2}}{x^2} - 5\underset{\substack{\downarrow \\ -2}}{x} + 3 \Rightarrow P(-1) = 4 + 10 + 3$

$= 17$ olur.

Cevap E

Örnek

$Q(x - 2) = x^2 - 4x + 3$ polinomu veriliyor.

Buna göre, Q(2x + 1) polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) –8 B) –4 C) 4 D) 8 E) 12

Çözüm

Q(2x + 1) polinomunun katsayılar toplamı için x yerine 1 yazılır.

$Q(\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{2x} + 1) = Q(2 \cdot 1 + 1) = Q(3) = ?$

$Q(\underbrace{x - 2}_{3}) = x^2 - 4x - 3 \quad \begin{bmatrix} x - 2 = 3 \\ x = 5 \end{bmatrix}$

$Q(\underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{x} - 2) = \underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{x^2} - 4\underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{x} + 3 \Rightarrow Q(3) = 25 - 20 + 3$

$= 8$ olur.

Cevap D

Örnek

a ve b tam sayılar olmak üzere

$P(x) = x^4 - (a + 2b)x^2 + b + 2$

$Q(x) = x^2 - ax - b$

polinomları için

- $P(1) = P(-2) = 0$
- $Q(1) = Q(-2) \neq 0$ olduğu biliniyor.

Q(x) polinomunun kökleri aynı zamanda P(x) polinomunun da kökleri olduğuna göre, a · b çarpımı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) –1

Çözüm

$P(1) = 1 - a - 2b + b + 2 \Rightarrow a + b = 3$

$P(2) = 16 - 4a - 8b + b + 2 \Rightarrow 4a + 7b = 18$

denklemler ortak çözülürse $a = 1$, $b = 2$ bulunur.

$a \cdot b = 2$'dir.

Cevap C

Örnek

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

olduğuna göre, A + B toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-10} = \frac{A}{\underset{(x+5)}{x-2}} + \frac{B}{\underset{(x-2)}{x+5}}$$

$$\frac{2x+3}{\cancel{x^2+3x-10}} = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{\cancel{(x-2)(x+5)}}$$

$2x + 3 = A(x + 5) + B(x - 2)$

(x yerine (x + 5)'i ve (x – 2)'yi sıfır yapan değerler yazılırsa)

$x = -5$ için $-7 = -7B \Rightarrow B = 1$

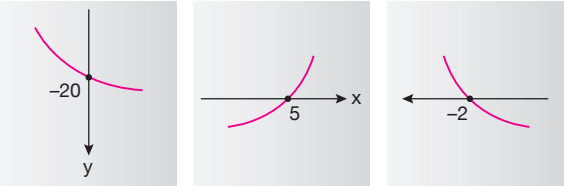
$x = 2$ için $7 = 7A \Rightarrow A = 1$

$A + B = 2$ olur.

Cevap A

Örnek

İkinci dereceden gerçel katsayılı bir P(x) polinomunun grafiğinin dik koordinat düzleminde eksenleri kestiği noktalara ait parçalar aşağıdaki gibidir.



Buna göre, P(2) kaçtır?

A) –26 B) –24 C) –22 D) –20 E) –18

Çözüm

$P(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)$

$P(0) = -20$ ise

$-20 = a \cdot (0 + 2) \cdot (0 - 5)$

$a = 2$ bulunur.

$P(x) = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)$

$\Rightarrow P(2) = 2 \cdot 4 \cdot (-3)$

$= -24$ bulunur.

Cevap B

Örnek

$$\frac{7x-1}{(x^2+2)\cdot(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{x-1}$$

olduğuna göre, A + B + C toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm

$$\frac{7x-1}{(x^2+2)(x-1)} = \frac{Ax+B}{\underset{(x-1)}{x^2+2}} + \frac{C}{\underset{(x^2+2)}{x-1}}$$

$7x - 1 = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2)$

$x = 1$ için $6 = 3C \Rightarrow C = 2$

$x = 0$ için $-1 = -B + 2C \Rightarrow B = 5$

$\downarrow$
2

$x = -1$ için $-8 = (-A + B)(-2) + 3C$

$\downarrow$ 5 $\downarrow$ 2

$-8 = 2A - 10 + 6$

$-4 = 2A \Rightarrow A = -2$ bulunur.

$A + B + C = 5$ olacaktır.

Cevap D

ÖABT 2025

HİBRİT KİTAP

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

MEB-AGS ÖABT

LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

SOYUT CEBİR - LİNEER CEBİR

KONU ANLATIMLI

e-Kitaba, video derslere ve kitabın baskı tarihinden sonraki güncellemelere erişebilmek için QR kodu okutunuz.

Fiziksel Kitap | HİBRİT KİTAP | e-Kitap

Video Ders Hediyeli

PEGEM AKADEMİ

Komisyon
MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği
Soyut Cebir - Lineer Cebir Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6128-13-2

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi
Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

1. Baskı: 2025, Ankara

Proje-Yayın: Pegem
Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya
Kapak Tasarımı: Pegem

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.
No: 141/33, Yenimahalle/Ankara
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: yayinevi@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 47865

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği Soyut Cebir - Lineer Cebir 2. Kitap" adlı yayınımız Soyut Cebir - Lineer Cebir bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB-AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı yayinevi@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi

Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Detaylı anlatım için QR kodu okutunuz.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:

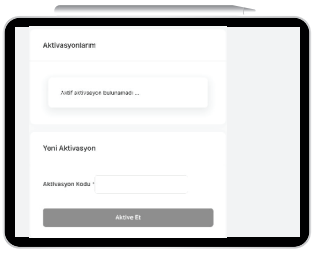
1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.

2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan **“Aktivasyonlarım”** sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.

Yırtmayınız
Kazıyınız



3. Adım Ürünlerim

“Hibrit Kitap” sekmesinden kitabınızın konu anlatımına ve video derslere,
“Ölçme İstasyonu” sekmesinden konu sonu testlerine erişim sağlayabilirsiniz.

Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2025 tarihine kadar geçerlidir.

Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

SOYUT CEBİR

Sayılar ve Özellikleri 1
- Rakam 1
- Sayma Sayıları 1
- Doğal Sayılar 1
- Tam Sayılar 1
- Aralarında Asallık 1
- Rasyonel Sayılar 1
- İrrasyonel Sayılar 1
- Reel Sayılar 1
- Tek ve Çift Sayılar 1
- Ardışık Sayılar 2
- Negatif ve Pozitif Sayılar ile İlgili Özellikler 2
- Tam Sayılarda Bölünebilme 2
- En Büyük Ortak Bölen 4
- En Küçük Ortak Kat 4

Euler φ-Fonksiyonu 7
- φ-Fonksiyonunun Bazı Özellikleri 7

Kongrüanslar 9
- Tam Sayılar ve Modüler Aritmetik 9
- Gruplar 19
- Tek İşlemli Cebirsel Yapı Türleri 19
- Mertebe 21

Alt Gruplar 22
- Normal Alt Gruplar 24

Simetrik (Permütasyon) ve Alterne Gruplar 25

Gruplarda Homomorfizm ve İzomorfizm 26
- Homomorfizma 26
- İzomorfizma 26

Bölüm Grupları 29

Devirli Gruplar 30
- Devirli Grupların Alt Grupları 31
- Üreteç Sayısı 32

Çarpım Grupları 32
- İzomorf olmayan Abelyan Gruplar 33

Halka, Cisim ve Tamlık Bölgesi 33
- Alt Halka 35
- Sıfır Bölenler ve Tamlık Bölgesi 35
- Bölüm Halkası 36
- İdeal 36
- Nilpotent Eleman 36

Polinom Halkası 36

Cisim 37
- Cebirsel Sayı 37
- Transandant Sayı 37
- Sayılabilir Küme 37

Çözümlü Test 1 43

Çözümlü Test 2 47

Çözümlü Test 3 51

Çözümlü Test 4 55

LİNEER CEBİR

Hatırlatma: İç İşlem....59

Dış İşlem....59

Grup....59

Alt Grup....59

Halka....59

Vektör Uzayları....60

Alt Vektör Uzayı....62

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık....66

Taban (Baz)....67

İç Çarpım Uzayları....68

İç Çarpım....68

Norm....70

Ortonormal Baz....75

Direkt Toplam Uzayı....80

İç Çarpım Uzaylarının Alt Uzayları....81

Lineer Dönüşümler....83

Matrisler ve Matris Uzayları....90

Matris Toplamı....91

Skaler ile Matris Çarpımı....92

Matris Çarpımı....92

Bir Matrisin Transpozu....93

Kare Matrisler....94

Bir Matrisin Tersi....94

Elemanter Operasyonlar (Basit İşlemler)....104

Determinantlar....105

Sarrus Kuralı....106

Minör ve Kofaktör....108

Alterne ve Çok Lineer Fonksiyonlar....115

n-Lineer Fonksiyonlar....115

Bir Lineer Dönüşümün Determinantı ve İzi....116

Determinantlarda Alan ve Hacim Hesabı....116

Matrislerin Polinomu....117

Karakteristik Değerler ve Karakteristik Vektörler....118

Karakteristik Uzay....119

Karakteristik Polinom ve Karakteristik Denklem....120

Çözümlü Test 1....127

Çözümlü Test 2....132

Çözümlü Test 3....136

Çözümlü Test 4....140

Çözümlü Test 5....144

SOYUT CEBİR

1. Sayılar ve Özellikleri

Rakam

Sayıları yazmaya yarayan sembollere rakam denir. Kullandığımız onluk sistemdeki rakamların kümesi {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} dur.

Rakamlarla oluşturulan ifadelere sayı denir.

Sayma Sayıları

{1, 2, 3, 4, ...} kümesi sayma sayılar kümesidir.

Doğal Sayılar

N = {0, 1, 2, 3, ...} kümesidir. N^+ = {1, 2, 3, ...} pozitif doğal sayılar kümesini ifade eder.

Tam Sayılar

Z = {..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...} kümesidir.

Tam sayılar kümesi üç ana bölümden oluşur. Negatif tam sayılar (Z^-), pozitif tam sayılar (Z^+) ve {0} kümesidir. Ayrıca $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$ dır.

Aralarında Asallık

p ve q sıfırdan farklı iki pozitif tam sayı olsun. p ve q sayılarını ortak olarak bölen en büyük pozitif tam sayı 1 ise p ve q aralarında asaldır denir.

Rasyonel Sayılar

$Q = \{\frac{p}{q}$: p ve q aralarında asal, $q \neq 0\}$ kümesidir.

İrrasyonel Sayılar

$I = Q'$ sembolleriyle gösterilir yukarıda tanımlanan $\frac{p}{q}$ tipinde yazılamayan sayılardan oluşur. Yani rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayı denir.

Reel Sayılar

Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşim kümesidir. R ile gösterilir. $R = Q \cup Q'$ dür.

Örnek

x, y, z ∈ Z olmak üzere,

x·y = 12, y . z = 4 ve x·z = 3

eşitliklerini sağlayan x, y, z sayılarının en büyük toplamı en küçük toplamından kaç fazladır?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm

$\frac{x \cdot y}{y \cdot z} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{x}{z} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot z$ bulunur.

Bu ifade x·z = 3 eşitliğinde yerine yazılırsa

$3z^2 = 3 \Rightarrow z = \mp 1$ bulunur.

z = 1 için x = 3 ve y = 4 olup x + y + z = 8

z = –1 için x = –3 ve y = –4 olup x + y + z = –8 bulunur.

8 – (–8) = 16 dır. Doğru seçenek C olarak elde edilir.

Örnek

a, b, c ∈ N **olmak üzere**

3a + 6b – c = 24 **eşitliğini sağlayan a, b ve c değerleri için** a + b + c **toplamının <u>en küçük</u> değeri kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm

Katsayısı büyük olana büyük değer verilir.

Sayılar aynı olabileceğinden a = 0 = c seçilirse b = 4 bulunur.

a + b + c = 4 olur.

Örnek

a ve b doğal sayılardır.

$56 \cdot a = b^3$

eşitliğini sağlayan <u>en küçük</u> b değeri kaçtır?

Çözüm

Önce sayı asal çarpanlarına ayrılır.

$56 = 2^3 \cdot 7$

$56 \cdot a = 2^3 \cdot 7 \cdot a = b^3$ tür.

Buradan $a = 7^2$ seçilirse b = 2·7 = 14 bulunur.

Tek ve Çift Sayılar

2 ile kalansız bölünebilen tam sayılara çift tam sayı, 2 ile tam bölünemeyen tam sayılara tek tam sayı denir. Çift sayılar 2n, tek tam sayılar 2n – 1 ile gösterilir (n ∈ Z).

Tek ve Çift Tam Sayılar İle İlgili Özellikler

1) T ∓ T = Ç
2) Ç ∓ Ç = Ç
3) T ∓ Ç = T
4) T·Ç = Ç
5) Ç·Ç = Ç
6) T·T = T
7) n ∈ N olmak üzere T^n = T
8) n ∈ N^+ olmak üzere $Ç^n$ = Ç dir.

NOT !

Tek ve çift sayılarda bölme işlemine ait kural tanımlanamaz. Örneğin 60, 40 ve 2 sayıları çift sayıdır.

$\frac{40}{2} = Ç, \frac{40}{40} = T, \frac{40}{60}$ sayısı ne tek ne de çifttir.

Ardışık Sayılar

$n \in Z$ olmak üzere n, n + 1, n + 2, ... sayılarına ardışık tam sayılar denir.

Kural:

$n \in Z^+$ için

$1 + 2 + ... + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ dir.

$n \in Z$ olmak üzere 2n – 1, 2n + 1, 2n + 3, ... sayılarına ardışık tek sayılar denir.

Kural:

$n \in Z^+$ için

$1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$ dir.

$n \in Z$ olmak üzere 2n, 2n + 2, 2n + 4, ... sayılarına ardışık çift sayılar denir.

Kural:

$n \in Z^+$ için

$2 + 4 + ... + 2n = n(n + 1)$ dir.

Kural:

Ardışık terimleri arasındaki artış miktarı eşit olan dizide

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$$

ve

$$\text{Terim Toplamı} = \frac{\text{Terim Sayısı}\cdot(\text{Son terim} + \text{İlk terim})}{2}$$

dir.

Negatif ve Pozitif Sayılar İle İlgili Özellikler

1) $(-)\cdot(-) = (+)$
2) $(-)\cdot(+) = (-)$
3) $(+)\cdot(+) = (+)$
4) $(+)\cdot(-) = (-)$
5) $(-) / (-) = (+)$
6) $(-) / (+) = (-)$
7) $(+) / (+) = (+)$
8) $(+) / (-) = (-)$
9) $n \in N$ olmak üzere $(-)^{2n} = (+)$ dır.
10) $n \in N$ olmak üzere $(-)^{2n-1} = (-)$ dir.
11) $n \in N$ olmak üzere $(+)^n = (+)$ dır.

Tam Sayılarda Bölünebilme

$m, n, r \in Z$ olmak üzere $m\cdot n = r$ olsun. Bu durumda m ve n ye r nin bölenleri (çarpanları) r ye de m ve n nin bir katı denir. m, r nin bir böleni ise bu durum $m \mid r$ ile, aksi takdirde $m \nmid r$ ile gösterilir.

2 ile bölünebilme: Çift tam sayılar 2 ile tam bölünür.

3 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları toplamı 3 veya 3 ün katı ise sayı 3 ile tam bölünür.

4 ile bölünebilme: Verilen sayının son iki basamağı (birler ve onlar basamağı) 4 ile tam bölünebiliyor ise verilen sayı 4 ile tam bölünür.

5 ile bölünebilme: Verilen sayının birler basamağı 0 veya 5 ise sayı 5 ile tam bölünür.

7 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları altına sağdan sola doğru sırasıyla 1, 2, 3 sayıları yazılır. Bu rakamlar altlarına yazdığımız sayılar ile çarpılır. Daha sonra sağdan sola üçerli gruplar hâlinde alınıp bu gruplar (+), (–) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 7 veya 7'nin katı ise verilen sayı 7 ile tam bölünür.

8 ile bölünebilme: Verilen sayının son üç basamağı (birler, onlar ve yüzler basamağı) 8 ile bölünebiliyor ise sayı 8'e tam bölünür.

9 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları toplamı 9 veya 9 un katı ise sayı 9 ile tam bölünür.

10 ile bölünebilme: Verilen sayının birler basamağı 0 ise verilen sayı 10 ile tam bölünür.

11 ile bölünebilme: Verilen sayı sağdan sola doğru sırası ile (+), (–) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 11 veya 11 in katı ise verilen sayı 11 ile tam bölünür.

Örnek

Hangi n doğal sayıları için $(n+1) \mid (n^2+1)$ dir.

Çözüm

$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ olduğundan $\forall\, n \in N$ için

$(n+1) \mid (n^2 - 1)$ dir.

$(n+1) \mid (n^2 + 1)$ ve $(n+1) \mid (n^2 - 1)$ olduğundan

$n+1 \mid [(n^2+1) - (n^2-1)] \Rightarrow n+1 \mid 2$ olur.

$n \in N$ olduğundan ve $n + 1 \le 2$ olması gerektiğinden

$n = 0, 1$ elde edilir.

Kural:

[1, x] aralığında n ile bölünebilen doğal sayıların sayısı $\left\| \dfrac{x}{n} \right\|$ dir.

Kural:

$a \in Z$ ve $m, n \in N$ olsun.

$n < m$ için $a^{2^n+1} \mid a^{2^m-1}$ dir.

Kural:

$n \ge 2$ olmak üzere n ve k iki doğal sayı olsun.

$n - 1 \mid n^k - 1$ dir.

Kural:

n bir doğal sayı ve k bir tek sayı olsun.

$(1 + 2 + ... + n) \mid (1^k + 2^k + ... + n^k)$ dır.

Kural:

a, b ∈ Z olsun. a sayısı b ile bölündüğünde kalan r ise $2^a - 1$ sayısı $2^b - 1$ ile bölündüğünde kalan $2^r - 1$ dir.

Örnek

{1, 2, ..., 600} **dizisinde 13 ile bölünebilen kaç tane doğal sayı vardır?**

Çözüm

$\left[\left[\frac{600}{13}\right]\right] = 46$ adettir.

Örnek

1000 den küçük kaç doğal sayı 17 ile bölünür?

Çözüm

[1, 1000] kümesinde

$\left[\left[\frac{1000}{17}\right]\right] = 58$ ve $0 \in N$ için $17 \mid 0$ olup toplam 58 + 1 = 59 adet sayı 17 ile tam bölünür.

Örnek

N = 1·2 + 2·3 + ... + n(n + 1) **sayısının 41 ile bölünebilmesi için n <u>en az</u> kaç olmalıdır?**

Çözüm

$$\begin{aligned} N &= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + n(n+1) \\ &= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + ... + (n^2 + n) \\ &= (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + (1 + 2 + ... + n) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

sayısının 41 ile bölünebilmesi için n(n + 1) (n + 2) çarpanlarından en az biri 41 e bölünmelidir.

n + 2 = 41 ⇒ n = 39 olmalıdır.

Teorem:

m, n ve r tam sayı olmak üzere,

i) ∀m ∈ Z iken $a \mid 0$ dır.

ii) ∀m ∈ Z için $\pm 1 \mid m$ ve $\pm m \mid m$ dir.

iii) $m \mid \pm 1 \Leftrightarrow m = \mp 1$ dir.

iv) $m \mid n$ ise $\pm m \mid \pm n$ dir.

v) $m \mid n$ ve $n \mid r$ ise $m \mid r$ dir.

vi) $m \mid n$ ve $n \mid m$ ise m = ±n dir.

vii) c ≠ 0 olmak üzere $cm \mid cn$ ise $m \mid n$ dir.

viii) $m_1 \mid n_1$ ve $m_2 \mid n_2$ ise $m_1 \cdot m_2 \mid n_1 \cdot n_2$ dir.

ix) $m \mid n$ ve $m \mid r$ ise $m \mid n+r$ dir.

Çıkmış Sorular

$k \mid m$ gösterimi k sayısının m sayısını tam bölündüğünü ifade eder.

Buna göre a, b ve c tam sayıları için,

I. $c \mid a\cdot b$ ise $c \mid a$ ve $c \mid b$ dir.

II. $a\cdot b \mid c$ ise $a \mid c$ ve $b \mid c$ dir.

III. $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ dir.

yargılarından hangileri <u>daima</u> doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III D) II ve III E) Yalnız III

Çözüm

c sayısı a·b yi bölüyor ise $c \mid a$ ve $c \mid b$ doğru olmayabilir, $6 \mid 2\cdot 3$ tür ama $6 \mid 2$ ve $6 \mid 3$ yanlıştır. II ve III. öncül doğrudur.

Cevap D

Tanım:

(Asal Sayı) : n > 1 tam sayısının kendisinden ve birden başka pozitif böleni yoksa n'ye asal (= prime) sayı denir.

Tanım:

(Bileşik Sayı): Asal olmayan sayılara bileşik (= combined) sayı denir.

Tanım:

Aralarındaki fark iki olan asal sayılara ikiz asallar denir.

Teorem:

Her bileşik sayının en az bir asal çarpanı vardır.

Teorem (Euclid):

Asal sayıların sayısı sonsuzdur.

Bir sayının tüm bölenlerinin sayısı pozitif bölenlerinin sayısının iki katıdır.

Uyarı !

Teorem (Bölme Algoritması):

$m, n \in Z$, $m, n \neq 0$ ise $m = q \cdot n + r$; $0 < r < |n|$

olacak şekilde bir tek q ve r tam sayı ikilisi vardır.

En Büyük Ortak Bölen:

m ve n tam sayılar olmak üzere $k|m$ ve $k|n$ ise k ye m ve n nin bir ortak böleni denir.

m ve n yi bölen en büyük pozitif d tam sayısına m ve n nin en büyük ortak böleni (=obeb = ebob) denir.

d = (m, n) ile gösterilir.

Uyarı

1) Tanıma göre d'nin m ve n'nin obeb'i olması için gerek ve yeter şart

i) $d|_m$ ve $d|_n$ olması,

ii) k, $k|_m$ ve $k|_n$ özelliğindeki bir başka ortak bölen iken $k|d$ olmasıdır.

2) İkiden fazla sayının obeb'i de benzer şekilde tanımlanır.

Uyarı

Obeb verilen tam sayıların pozitif lineer toplamlarının en küçüğüdür.

Teorem:

Sıfırdan farklı iki tam sayının obeb'i tektir.

Teorem: $(m,n) = d \Leftrightarrow \left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$'dir.

Teorem:

(a, b) = 1 ve (a, c) = 1 ise (a, b, c) = 1'dir.

Teorem:

$\frac{a}{b} \cdot c$ ve (a, b) = 1 ise $\frac{a}{c}$ dir.

En Küçük Ortak Kat:

a, b sıfırdan farklı tam sayılar olsun.

a) $k \in N$ olmak üzere $a|_k$ ve $b|_k$ ise k'ye a ve b'nin bir ortak katı denir.

b) k, a ve b'nin bir ortak katı olsun. Eğer t; a ile b'nin bir başka ortak katı iken $k|_t$ ise k'ye a ile b'nin en küçük ortak katı (ekok) denir ve [a, b] = k ile gösterilir.

Teorem:

$a, b \neq 0$ iki tam sayı ise $(a, b)\cdot[a, b] = |a\cdot b|$ dir.

Örnek

$x \in N$ **olmak üzere** $p = x^2 - 1$ **olacak şekildeki tüm p asal sayılarını bulunuz.**

Çözüm

P = (x – 1) (x + 1) sayısının çarpanları

$\left.\begin{matrix} 1\cdot p \\ p\cdot 1 \end{matrix}\right\}$ P asal olduğundan çarpanı 1 ve kendisidir.

$(-1)\cdot(-p)$

$(-p)\cdot(-1)$ tipindedir.

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$, $p = 3$ asaldır.

$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$, $p = -1$ asal değil.

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$, $p = -1$ asal değil

$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2$, $x = -2 \notin N$

Çözüm kümesi p = {3} tür.

Örnek

$x \in N$ **olmak üzere** $p = x^3 - 1$ **şeklindeki tüm p asallarını bulunuz.**

Çözüm

$P = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ sayısının çarpanları

$p\cdot 1$

$1\cdot p$

$(-1)\cdot(-p)$

$(-p)\cdot(-1)$ tipindedir.

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$, $p = 2^2 + 2 + 1 = 7$ asaldır.

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$, $p = -1$ asal değildir.

$x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = -1$

$p = -1$ asal değil $p = -2$ asal değil

$x^2 + x + 1 = -1 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot 1}}{2} \notin N$

Çözüm kümesi x = {7} dir.

Örnek

(a, 4) = 2 **ve** (b, 4) = 2 **iken** (a + b, 4) **nedir?**

Çözüm

(a, 4) = 2 olduğundan a = 2m olacak biçimde bir m tek sayısı ve (b, 4) = 2 olduğundan b = 2n olacak şekilde bir n tek sayısı vardır. Eğer m ve n sayısı tek olmasaydı,

(a, 4) = (b, 4) = 4 olurdu.

a + b = 2m + 2n = 2(m + n) olur.

m ve n tek olduğundan, m + n çifttir.

m + n = 2k denirse a + b = 4k bulunur.

Bu durumda (a + b, 4) = (4k, 4) = 4(k, 1) = 4 bulunur.

Teorem:

p, asal sayısı için $p|_a \cdot b$ ise $p|_a$ veya $p|_b$ dir.

p asal sayı değil ise bu teorem doğru olmaz. Örneğin;

$8|_{4\cdot 2}$ fakat $8 \nmid 4$ ve $8 \nmid 2$ dir.

NOT !

Sonuç:

p asal ve $p|_{a_1} \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ ise en az bir $1 \le i \le n$ için $p|_{a_i}$ dir.

Sonuç:

p, p_1, p_2, ..., p_n asal sayılar ve $p|_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ ise en az bir $1 \le i \le n$ için $p = p_i$ dir.

Teorem:

∀ n > 1 tam sayısı çarpanların sırası hariç bir tek şekilde asal çarpanlarına ayrılabilir.

Uyarı:

$n = p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$ yazılımında asal p_i çarpımlarının bazıları eşit olabilir. p_i çarpanı bu yazılımda α_i kez yer alıyorsa n sayısı kısaca;

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t} = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i} \quad (t \le k)$$

şeklinde yazılabilir. Bu son yazılıma n sayısının standart formu denir.

Örneğin; 60 sayısının standart formu $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ dir.

Teorem:

n > 1 tam sayısının pozitif bölenlerinin sayısını s(n) ile gösterelim.

$$n = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i} \Rightarrow s(n) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) \text{ dir.}$$

Teorem:

n > 1 tam sayısının pozitif bölenlerinin toplamını t(n) ile gösterelim.

$$n = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i} \Rightarrow t(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{P_i^{\alpha_{i+1}} - 1}{P_i - 1} \text{ dir.}$$

Örnek

504 sayısının pozitif bölenlerini ve pozitif bölenlerinin toplamını bulunuz.

Çözüm

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ olup $s(504) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ olur.

$$t(504) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{7^2 - 1}{7 - 1} = 15 \cdot 13 \cdot 8 = 1560 \text{ dır.}$$

Uyarı:

Örnekten de görüldüğü gibi t(n) değeri

$(P_1^0 + P_1^1 + P_1^2 + \ldots + P_1^{\alpha_i}).(P_2^0 + \ldots + P_2^{\alpha_2}) \ldots (P_k^0 + \ldots + P_k^{\alpha_k})$

çarpımı ile de hesaplanabilir.

Uyarı:

Özel olarak t(1) = s(1) = 1 tanımlanır.

Tanım:

t(n) = 2n ise n tam sayısına mükemmel sayı denir.

n	t(n)
1	1
2	3
3	4
4	7
5	6
6	12

İlk dört mükemmel sayı 6, 28, 496 ve 8128 dir.

Teorem:

p asal ise p mükemmel sayı olamaz.

ÖABT 2025

HİBRİT KİTAP

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

MEB-AGS ÖABT

LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

GEOMETRİ - İSTATİSTİK VE OLASILIK

KONU ANLATIMLI

e-Kitaba, video derslere ve kitabın baskı tarihinden sonraki güncellemelere erişebilmek için QR kodu okutunuz.

Fiziksel Kitap | HİBRİT KİTAP | e-Kitap

Video Ders Hediyeli

PEGEM AKADEMİ

Komisyon
MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Geometri - İstatistik ve Olasılık
Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6128-13-2

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi
Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

1. Baskı: 2025, Ankara

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.
No: 141/33, Yenimahalle/Ankara
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: yayinevi@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 47865

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği Geometri-İstatistik ve Olasılık 3. Kitap" adlı yayınımız Geometri - İstatistik ve Olasılık bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB-AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı yayinevi@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi

Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Detaylı anlatım için QR kodu okutunuz.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:

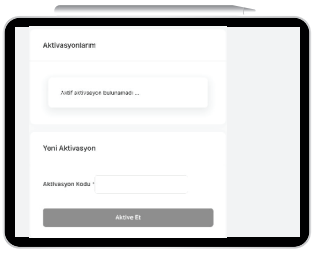
1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.

2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan **“Aktivasyonlarım”** sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.

Yırtmayınız
Kazıyınız



3. Adım Ürünlerim

“Hibrit Kitap” sekmesinden kitabınızın konu anlatımına ve video derslere,
“Ölçme İstasyonu” sekmesinden konu sonu testlerine erişim sağlayabilirsiniz.

Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2025 tarihine kadar geçerlidir.

Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

UZAYDA VEKTÖRLER

UZAYDA VEKTÖRLER 1
- İki Vektörün Paralelliği 2
- Vektörlerin Lineer Bileşimi 2
- Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık 2
- Standart Birim Vektörleri 2
- Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı 2
- İki Vektör Arasındaki Açı 3
- Dik İzdüşüm Vektörü 3
- Vektörel (Çapraz) Çarpım 4
- Paralelkenarın Alanı 5
- Paralelyüzün Hacmi 6

Çözümlü Test 9

Çözümler 11

UZAYDA DOĞRU ve DÜZLEM DENKLEMİ

UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEM DENKLEMİ 13
- İki Noktası Belli Olan Doğru Denklemi 13
- Düzlem 14
- Çözümlü Sorular - I 16
- Bir Noktanın Düzleme Uzaklığı 19
- Çözümlü Sorular - II 19
- Uzayda İki Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları ve Kesişme Noktasının Bulunması 22
- Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı 23
- Aykırı İki Doğru Arasındaki En Kısa Uzaklık ve Ortak Dikme ve Dikme Ayaklarının Bulunması 24
- Çözümlü Sorular 24
- İki Düzlemin Birbirlerine Göre Konumu ve İki Düzlem Arasındaki Açı 28
- Bir Düzlem ile Bir Doğru Arasındaki Açı 28
- İki Düzlemin Açıortay Düzlemi 28
- Çözümlü Sorular 28
- Bir Doğrudan Geçen Düzlem Demeti 30
- Uzayda Simetri 31
- Çözümlü Sorular 32

Çözümlü Test - 1 37

Çözümler 39

Çözümlü Test - 2 41

Çözümler 43

YÜZEYLER

E^3 DE YÜZEY 46

KÜRE 46
- Küre Olma Koşulları 47
- Kürenin Parametrik Denklemi 48
- Kürenin Teğet Düzlemi 48

SİLİNDİR 48

KONİ 50
- Bazı Kuadratik Yüzeyler 54
- Çözümlü Sorular 54
- Silindirin İsimlendirilmesi 55
- Dönel Yüzeyler 57

SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR 59

KÜRESEL KOORDİNATLAR 59

Çözümlü Test 60

Çözümler 62

KONİKLER

TANIM 64
- Genel Konik Denkleminde x.y– li Terimi Yok Etme 64

ELİPS - HİPERBOL - PARABOL

ELİPS 66
- Elipsin Denklemi 66
- Elipsin Teğet ve Normal Denklemleri 67
- Elipsin Parametrik Denklemi 68

HİPERBOL 70
- Hiperbolün Denklemi 70

PARABOL 73
- Parabolün Denklemi 73

Çözümlü Test 82

Çözümler 84

Karma Test - 1 86

Çözümler 88

Karma Test - 2 90

Çözümler 92

2. BÖLÜM

İSTATİSTİK VE OLASILIK

TEMEL KAVRAMLAR 94
Sayısal Bilgi, Veri, Ölçüm 94
Değişken ve Türleri 94
Fonksiyon 94
Evren ve Örneklem 96
İstatistik ve Parametre 96
Çözümlü Test 97
Çözümler 99

VERİNİN DÜZENLENMESİ VE MERKEZE EĞİLME ÖLÇÜLERİ

VERİNİN DÜZENLENMESİ 100
Grafik Çizme 100
Merkeze Eğilme (Yığılma) Ölçüleri 101
Mod (Tepe Değer) 101
Medyan (Ortanca) 101
Aritmetik Ortalama 102
Mod, Medyan ve Ortalamanın Karşılaştırılması 103
Ağırlıklı Ortalama 104
DEĞİŞME (DAĞILMA) ÖLÇÜLERİ 105
Ranj (Açıklık) 105
Mutlak Kayma 105
Varyans ve Standart Kayma 105
Bağıl Değişkenlik Katsayısı 107
STANDARTLAŞTIRMA (z ve T PUANLARI) 107
z Puanı 107
T Puanı 107
Çözümlü Test 109
Çözümler 112

OLASILIK

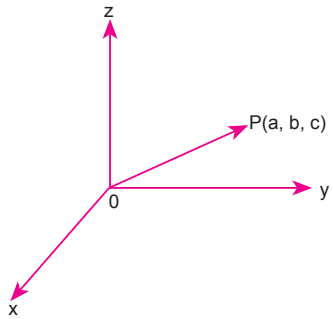
TEMEL KAVRAMLAR 114
Olasılık 115
Birleşik Olayların Olasılığı 116
Ayrık İki Olayın Birleşiminin Olasılığı 116
Olaylar Arasındaki Bağıntılar 117
Şartlı Olaylar ve Olasılıklar 117
Bağımsız Olaylar 118
Çözümlü Sorular 119
TESADÜFÎ DEĞİŞKEN, OLASILIK FONKSİYONU VE BEKLENEN DEĞER 121
Tesadüfî Değişkenin Beklenen Değeri 127
Varyans Hesabı 130
Momentler 133
Moment Çıkaran Fonksiyon 133
Birleşik Olasılık Dağılımı 135
Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu 135
Marjinal Olasılık Fonksiyonları 136
Kovaryans ve Korelasyon 138
Çözümlü Test 145
Çözümler 148

OLASILIK DAĞILIMLARI

OLASILIK 150
Binom Olasılık Dağılımı 150
Poisson Olasılık Dağılımı 152
Hipergeometrik Olasılık Dağılımı 153
Normal Olasılık Dağılımı 160
Standart Normal Olasılık Dağılımı 161
Çözümlü Test 163
Çözümler 166
Çözümlü Deneme - 1 168
Çözümler 171
Çözümlü Deneme - 2 174
Çözümler 177

UZAYDA VEKTÖRLER

$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ kümesine 3 boyutlu vektör uzayı denir. Vektörlerin başlangıç noktası orijin olmak üzere, R^3 ün her noktasına bir vektör karşılık gelir.



$\overrightarrow{OP} = (a, b, c)$ ise a, b, c sayılarına $\overrightarrow{OP}$ yer vektörünün bileşenleri denir. P noktasının orijine olan uzaklığına, $\overrightarrow{OP}$ vektörünün normu (uzunluğu) denir ve $|\overrightarrow{OP}|$ ile gösterilir.

$\overrightarrow{OP} = (a, b, c) \Rightarrow |\overrightarrow{OP}| = |\vec{P}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dir.

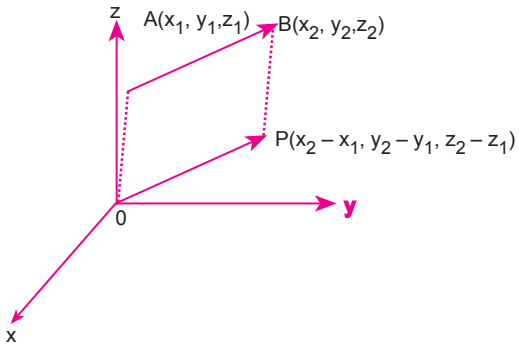
$\overrightarrow{AB}$ vektörüne eş, başlangıç noktası orijin olan $\overrightarrow{OP}$ vektörüne, $\overrightarrow{AB}$ vektörünün yer vektörü denir.

$A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ ise;

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Normu 1 olan vektöre birim vektör denir.



Çıkmış Sorular

Uzayda A(1, 2, 3), B(2, –1, –4) ve C(m, 2, –1) noktaları veriliyor.

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ **olduğuna göre, m kaçtır?**

A) –27 B) –29 C) 14 D) 29 E) 27

Çözüm

$\overrightarrow{AB} = (1, -3, -7)$ $\overrightarrow{AC} = (m-1, 0, -4)$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ dır.

$1(m-1) + (-3)\cdot 0 + (-7)(-4) = 0$

$m + 27 = 0$

$m = -27$ olur.

Cevap A

Örnek

A(1, –1, 1) ve B(2, a, –3) noktaları veriliyor.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{26}$ **br olduğuna göre a sayısının alabileceği değerleri bulunuz.**

Çözüm

$\overrightarrow{AB} = (1, a+1, -4)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{26} \Rightarrow \sqrt{1^2 + (a+1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$

$\Rightarrow (a+1)^2 + 17 = 26$

$\Rightarrow (a+1)^2 = 9$

$\Rightarrow |a+1| = 3 \Rightarrow a = 2$ veya $a = -4$

Çıkmış Sorular

Dik koordinat düzleminde verilen $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri için $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$, $\|\vec{u}+\vec{v}\| + \|\vec{u}-\vec{v}\| = 16$ olduğuna göre, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ değeri kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

Çözüm

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|v\|^2 + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$ olur.

Buna göre;

$\underbrace{\left(\|\vec{u}+\vec{v}\| + \|\vec{u}-\vec{v}\|\right)}_{16}\cdot\left(\|\vec{u}+\vec{v}\| - \|\vec{u}-\vec{v}\|\right) = 4\cdot 8$

$\|\vec{u}+\vec{v}\| - \|\vec{u}-\vec{v}\| = 2$

$+\ \|\vec{u}+\vec{v}\| + \|\vec{u}+\vec{v}\| = +16$

$2\cdot\|\vec{u}+\vec{v}\| = 18 \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| = 9$ olur.

Cevap B

İki Vektörün Paralelliği

$\vec{a}, \vec{b} \in R^3$, $k \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ olmak üzere,

$\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b}$ dir.

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere

$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$ dir.

Örnek

A(2, 4, 2) ve B(6, 2, 4) noktaları ile

$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$ vektörü veriliyor.

$\overrightarrow{AB} // \vec{v}$ **olduğuna göre,** (x, y) **ikilisini bulunuz.**

Çözüm

$\overrightarrow{AB} = (4, -2, 2)$

$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$

$\overrightarrow{AB} // \vec{v} \Rightarrow \dfrac{x - y}{4} = \dfrac{x + 2y}{-2} = \dfrac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) = (1, -1)$ olur.

Vektörlerin Lineer Bileşimi

$\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, ..., \vec{V_n} \in R^3$ ve $k_1, k_2, k_3, ..., k_n \in R$

olmak üzere,

$\vec{u} = k_1 \cdot \vec{V_1} + k_2 \cdot \vec{V_2} + k_3 \cdot \vec{V_3} + ... + k_n \cdot \vec{V_n}$ vektörüne,

$\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, ..., \vec{V_n}$ vektörlerinin lineer bileşimi denir.

Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık

IR^3 de $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, ...\vec{V_n}$ vektörleri verilsin.

$c_1 \cdot \vec{V_1} + c_2 \cdot \vec{V_2} + c_3 \cdot \vec{V_3} + ... + c_n \cdot \vec{V_n} = \vec{0}$ denklemi yalnız

$c_1 = c_2 = c_3 ... = c_n = 0$ için sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımsız; $c_1 = c_2 = c_3 ... = c_n = 0$ değerlerinden en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımlı denir.

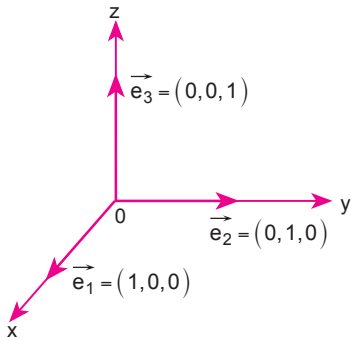
Uyarı!

$V = \{\vec{V_1}, \vec{V_2}, ...\vec{V_n}\}$, IR^3 uzayının bir alt kümesi olmak üzere $\det(\vec{V_1}, \vec{V_2}, ...\vec{V_n}) = A$ olsun.

I. $A = 0 \Leftrightarrow$ V kümesi lineer bağımlı,

II. $A \neq 0 \Leftrightarrow$ V kümesi lineer bağımsızdır denir.

Standart Birim Vektörleri



R^3 vektör uzayında üzerinde bulunduğu eksen ile pozitif yönlü birim vektörlere, standart birim vektörler denir.

$\vec{e_1} = \vec{i} = (1, 0, 0)$

$\vec{e_2} = \vec{j} = (0, 1, 0)$

$\vec{e_3} = \vec{k} = (0, 0, 1)$

Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı

Her $\vec{A}, \vec{B} \in R^3$ için;

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = <\vec{A}, \vec{B}> = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

şeklinde tanımlanan işleme, "R^3 de Öklid iç çarpım işlemi" denir.

Özellikleri

1. $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$, $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$
2. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ (değişme özelliği)
3. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ (çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)

Örnek

$\vec{A}=(3,a,-2)$ ve $\vec{B}=(a,2,10)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A}\cdot\vec{B}=5$ **olduğuna göre a sayısının kaç olacağını bulunuz.**

Çözüm

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=5$$
$$3a+2a-2\cdot 10=5$$
$$5a=25$$
$$a=5$$

İki Vektör Arasındaki Açı

$\vec{A},\vec{B}\in R^3$ verilsin. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü α olmak üzere,

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha}$ olur.

$\vec{A}\perp\vec{B}$ ise $\alpha=90°$ için $\cos\alpha=0$ olduğundan

$\vec{A}\perp\vec{B}\Leftrightarrow\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ olur.

Örnek

$\vec{A}=(-1,2,3)$ ve $\vec{B}=(1,-1,2)$ **vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.**

Çözüm

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\theta$$
$$-1-2+6=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\cos\theta$$
$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

Örnek

$\vec{A}=(1,1,2)$ ve $\vec{B}=(\sqrt{3}-1,-\sqrt{3}-1,4)$ **vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.**

Çözüm

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1+8=6$$
$$|\vec{A}|=\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}=16$$
$$|\vec{B}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(-\sqrt{3}-1)^2+4^2}$$
$$=\sqrt{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}+16}$$
$$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$
$$\cos\theta=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}}\text{ olur.}$$
$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

Örnek

$\vec{A}$ **ile** $\vec{B}$ **vektörleri arasındaki açının ölçüsü 45°,**

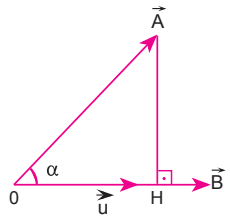
$|\vec{A}|=2\sqrt{2}$ **ve** $|\vec{B}|=3$ **olduğuna göre,**

$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(3\vec{A}-2\vec{B})$ **iç çarpımının sonucunu bulunuz.**

Çözüm

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(3\vec{A}-2\vec{B})=3\cdot\vec{A}\cdot\vec{A}+3\cdot\vec{A}\cdot\vec{B}-2\vec{A}\cdot\vec{B}-2\cdot\vec{B}\cdot\vec{B}$$
$$=3\cdot|\vec{A}|^2+\vec{A}\cdot\vec{B}-2\cdot|\vec{B}|^2$$
$$=3\cdot 8+2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\cos 45°-2\cdot 9$$
$$=24+6-18$$
$$=12\text{ olur.}$$

Dik İzdüşüm Vektörü



$\vec{A}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{B}=(x_2,y_2,z_2)$ vektörleri verilsin.

$\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü

$\overrightarrow{OH}=\vec{u}$ olsun. $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açı α olmak üzere;

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|}$ dir. $\cos\alpha=\dfrac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{A}\|}$ yazılırsa

$\dfrac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{A}\|}=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|}\Rightarrow\|\vec{u}\|=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$ dik izdüşüm vektörünün uzunluğudur.

$\vec{u}=\|\vec{u}\|\cdot\dfrac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$ olacağından

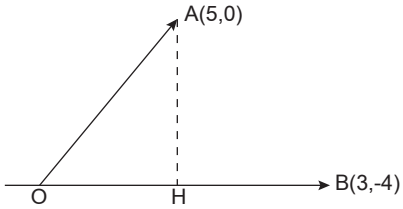
$\vec{u}=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\cdot\vec{B}$ dik izdüşüm vektörünü verir.

Çıkmış Sorular

Düzlemde A(5, 0) vektörünün B(3, –4) vektörü üzerine dik izdüşüm vektörünün uzunluğu kaç birimdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm



$$\|OH\| = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{B}\|}$$

$$\|OH\| = \frac{5\cdot 3 + 0\cdot(-4)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$\|OH\| = 3$ br bulunur.

Cevap C

Örnek

$\vec{A} = (1,4,2)$ ve $\vec{B} = (-2,1,3)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A}$ nın $\vec{B}$ üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğunun ve dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-2+4+6}{\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

Dik izdüşüm vektörü;

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\cdot\vec{B} = \frac{8}{14}\cdot(-2,1,3) = \frac{4}{7}(-2,1,3) \text{ olur.}$$

Vektörel (Çapraz) Çarpım

R^3 te $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri verilsin.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin vektörel çarpımı bir $\vec{C}$ vektörünü verir.

$\vec{C} = \vec{A}x\vec{B}$ şeklinde gösterilir.

α: $\vec{A}$ vektörü ile $\vec{B}$ vektörü arasındaki açı

$\vec{P}$; $\vec{A}$ vektörü ile $\vec{B}$ vektörünün yönünü gösteren birim vektör olmak üzere;

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nin vektörel çarpımı :

$\vec{C} = \vec{A}x\vec{B} = \vec{P}\cdot|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin\alpha$ dır.

Elde edilen $\vec{C}$ vektörü, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin ait olduğu düzleme dik olan bir vektördür.

$$\vec{C} = \vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri, vektörel çarpımı verir.

Örnek

$\vec{A} = (3,1,0)$ **ve** $\vec{B} = (0,1,2)$ **olduğuna göre,**

$\|\vec{A}x\vec{B}\|$ **kaçtır?**

Çözüm

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 6j + 3k$$

$$= (2,-6,3)$$

$$\|\vec{A}x\vec{B}\| = \sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}$$

$$= \sqrt{4+36+9}$$

$= 7$ olur.

Özellikleri:

$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in R^3$ ve $k \in R$ olmak üzere;

I. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

II. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

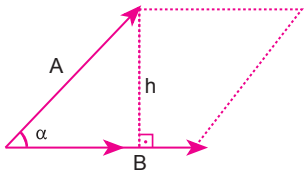
III. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

IV. $(k\cdot\vec{A})x\vec{B} = \vec{A}x(k\cdot\vec{B}) = k\cdot(\vec{A}x\vec{B})$, $k \in R$

V. $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot\sin\theta$ (θ: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açıdır.)

VI. $\left.\begin{matrix}\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \rangle = 0 \\ \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{B} \rangle = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{A} \times \vec{B}$ ve $\vec{B} \perp \vec{A} \times \vec{B}$ dır.

Paralelkenarın Alanı



$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri üzerine kurulu paralelkenarın alanı S olsun,

$$S = \|\vec{A} \times \vec{B}\|$$

ile hesaplanır.

NOT!

Köşelerinin koordinatları A, B, C olan üçgenin alanı;

$$Alan = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

ile hesaplanır.

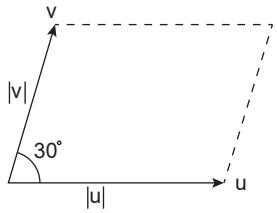
Çıkmış Sorular

Dik koordinat düzleminde $\vec{u} = (-2\sqrt{7}, 2\sqrt{2})$ vektörünün orijin etrafında 30° derece döndürülmesi ile oluşan vektör v olsun.

Buna göre $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin oluşturmuş olduğu paralelkenarın alanı kaç birimdir?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 36

Çözüm



Paralelkenarın alanı $|\vec{u}| \cdot |v| \cdot \sin 30^\circ$ dir. $(|u| = |v|)$

$|u| = \sqrt{(-2\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 6$

Paralelkenarın alanı $= 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

Cevap C $= 18$ olur.

Karma Çarpım

$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in R^3$ için $\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle$ reel değerine $\vec{A}, \vec{B}$ ve $\vec{C}$ nin karma çarpımı denir ve $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ ile gösterilir.

Özellikleri

$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in R^3$ için

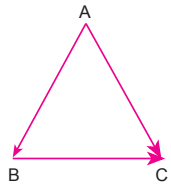
1. $\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{B} \times \vec{C} \rangle$

2. $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ dir.

Örnek

Köşelerinin koordinatları A(1, –2, 3), B(2, 1, 0) **ve** C(–1, 0, 3) **olan üçgenin alanını bulunuz.**

Çözüm



$\overrightarrow{AB} = (1, 3, -3)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (+6, 6, 8)$$

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{34}\ br^2$ olur.

Örnek

Köşelerinin koordinatları A(1, 2), B(–2, 3) **ve** C(–1, 5) **olan üçgenin alanını bulunuz.**

Çözüm

A(1, 2, 0), B(–2, 3, 0) ve C(–1, 5, 0) olarak düşünelim.

$\overrightarrow{AB} = (-3, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 3, 0)$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (0, 0, -7)$$

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{7}{2} br^2$ olur.