

2025

HİBRİT  
KİTAP

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

# MEB-AGS ÖABT

LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ  
ANALİZ · DİFERANSİYEL DENKLEMLER  
KONU ANLATIMLI



e-Kitaba ve video derslere  
erişebilmek için  
QR kodu okutunuz.



Fiziksel Kitap

HİBRİT  
KİTAP

e-Kitap

Video Ders Hediye

**ARTIFORCE, TÜBİTAK-TEYDEB** Destek Programından yararlanılarak geliştirilmiştir (Proje No: 7230451).  
Ürün/hizmet ile ilgili tüm sorumluluk Pegem Akademi Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Hizmetleri Tic. AŞ'ye aittir.

**PEGEM AKADEMİ**



## Komisyon

### MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Analiz Diferansiyel Denklemler Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6128-13-2

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

**I. Baskı:** 2024, Ankara

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

## İletişim

**Pegem Akademi:** Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: [www.pegem.net](http://www.pegem.net)

E-ileti: [pegem@pegem.net](mailto:pegem@pegem.net)

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

**Baskı:**Ankara Özgür Matbaacılık  
1250. Cad. No: 25 Ostim Yenimahalle/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 46821

## ÖNSÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği 1. Kitap" adlı yayınımız Analiz ve Diferansiyel Denklemler bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB - AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı [pegem@pegem.net](mailto:pegem@pegem.net) adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi



Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

## TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

### Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



- 1 Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
- 2 Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
- 3 Konu sonu testlerini çözebilir.

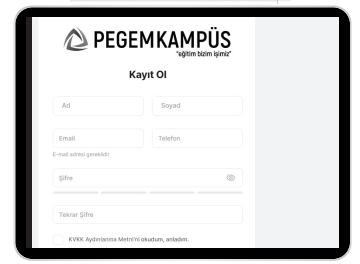


Yapay zekânın öğrenme analizinizi yapabilmesi için interaktif içeriklere etkileşim bırakmanız gerekmektedir. Etkileşim bırakmak için testlerde yer alan cevap seçeneklerini sistem üzerinde işaretlemeniz gerekmektedir. Böylelikle yapay zekâ bırakılan etkileşimler sonrasında sizlerin başarı durumlarını tespit ederek eksik tespitinizi gerçekleştirecektir.

**Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:**

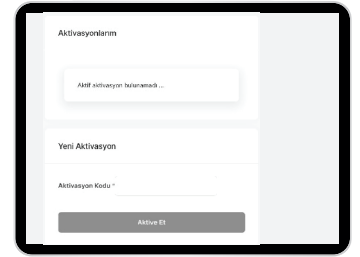
#### 1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.



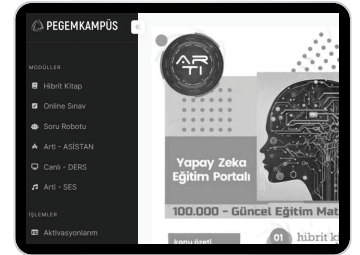
#### 2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "**Aktivasyonlarım**" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



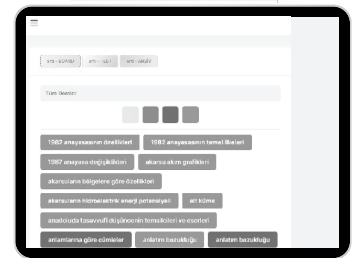
#### 3. Adım Ürünlerim

Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "**Hibrit Kitap**" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



#### 4. Adım Yapay Zekâ Asistan

Hibrit kitaptaki işaretlemeleriniz doğrultusunda eksik tespitinizi yapabilmek için menüdeki "**Arti-Asistan**" sekmesine tıklayabilirsiniz. Eksiklerinizi tamamlamak ve daha fazla içerik görmek için pegemkampus.com adresini ziyaret edebilirsiniz.



**Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2025 tarihine kadar geçerlidir.**



**Pegem Kampüs İletişim Hattı  
0312 418 51 55**

## İÇİNDEKİLER

## 1. KISIM

## 1. BÖLÜM – POLİNOMLAR

POLİNOMLAR .....	1
İki Polinom Eşitliği .....	1
Sabit Terim .....	1
Katsayılar Toplamı .....	2
Polinom Derecesiyle İlgili Özellikler .....	2
Polinomlarda Kalan Bulma .....	2

## 2. BÖLÜM – İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLER

İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLER .....	14
Kökler Ve Katsayılar Arasındaki Bağlantılar .....	14
Kökleri Bilinen İkinci Derece Denklem Yazılması .....	14
Karmaşık Sayılar .....	15
İ Sayısının Kuvvetleri .....	15
Karmaşık Sayıların Eşitliği .....	15
Karmaşık Sayıların Eşleniği .....	15
İkinci Dereceden Denklem Karmaşık Kökleri .....	15
İkinci Dereceye Dönüştürülebilen Denklemler Ve Denklem Sistemleri .....	16

## 3. BÖLÜM – PARABOL

PARABOL .....	27
İki Parabolün Birbirine Göre Durumları .....	28
Bir Doğru İle Bir Parabolün Durumları .....	28

## 4. BÖLÜM – EŞİTSİZLİKLER

EŞİTSİZLİKLER .....	48
İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Köklerinin Varlığı Ve İşareti .....	48

## 5. BÖLÜM – TRİGONOMETRİ

TRİGONOMETRİ .....	53
Açı Ölçü Birimleri .....	53
Trigonometrik Fonksiyonlar .....	53
Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri .....	53
Trigonometrik Özdeşlikler .....	54
Geniş Açıların Trigonometrik Oranları .....	54
Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları .....	55
Kosinüs Teoremi .....	55
Sinüs Teoremi .....	55
Üçgenin Alanı .....	55
Ters Trigonometrik Fonksiyonlar .....	56
Periyodik Fonksiyonlar .....	56
Toplam Ve Fark Formülleri .....	57
İki Kat Açılış Formülleri .....	57
Trigonometrik Denklemler .....	57

## 6. BÖLÜM – LOGARİTMA

Üstel Fonksiyon .....	83
Logaritma Fonksiyonu .....	83
Logaritma Fonksiyonunun Grafiği .....	83
Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri .....	84
Logaritmalı Denklem Ve Eşitsizlikleri .....	85

## 7. BÖLÜM FONKSİYONLAR

FONKSİYONLAR .....	101
FONKSİYON ÇEŞİTLERİ .....	102
Birebir fonksiyon .....	102
Örten fonksiyon .....	103
İçine fonksiyon .....	104
Sabit fonksiyon .....	104
Tek ve Çift fonksiyon .....	104
Birim fonksiyon .....	105
Ters fonksiyon .....	105
Bileşke fonksiyon .....	105
Bileşke fonksiyonun Özellikleri .....	105
ALIŞILMIŞ FONKSİYON TÜRLERİ .....	106
Kuvvet fonksiyonları .....	106
Polinom fonksiyonlar .....	106
Rasyonel fonksiyonlar .....	106

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR	
PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR .....	107
MUTLAK DEĞER FONKSİYONU .....	107
MUTLAK DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER VE DENKLEMLER .....	109
SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONU .....	111
İŞARET FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ .....	112
TAM DEĞER VE TAM DEĞER FONKSİYONU .....	113
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ .....	113
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN GRAFİKLERİ .....	116
FONKSİYONLARIN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ .....	117
FONKSİYON GRAFİKLERİNDE ÖTELEMELER .....	118
<b>8. BÖLÜM LİMİT</b>	
LİMİT .....	124
SAĞ – SOL LİMİT .....	124
GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ .....	126
LİMİT İLE İLGİLİ TEOREMLER .....	127
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ .....	128
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN LİMİTİ .....	129
SİGNUM FONKSİYONUNUN LİMİTİ .....	130
TAM DEĞER FONKSİYONLARININ LİMİTİ .....	131
BELİRSİZ DURUMLAR 0/0 BELİRSİZLİĞİ .....	133
TRİGONOMETRİK 0/0 BELİRSİZLİĞİ .....	134
$\infty/\infty$ BELİRSİZLİĞİ .....	135
$\infty-\infty$ BELİRSİZLİĞİ .....	137
$0 \cdot \infty$ BELİRSİZLİĞİ .....	138
ÜSLÜ, ÜSTEL BELİRSİZLİKLERİN $\infty/\infty$ FORMU .....	139
SÜREKLİLİK .....	140
SÜREKLİLİK TEOREMLERİ .....	140
SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ .....	141
Kaldırılabilir Süreksizlik .....	141
Sıçrama Süreksizliği .....	141
Sonsuz Süreksizliği .....	141
Balzano Teoremi .....	141
DÜZGÜN SÜREKLİLİK .....	143
<b>9. BÖLÜM TÜREV</b>	
TÜREV .....	150
SAĞ-SOL TÜREV .....	151
LİMİT – SÜREKLİLİK – TÜREV İLİŞKİSİ .....	151
TÜREV ALMA KURALLARI .....	152
YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER .....	166
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ .....	168
Parçalı Fonksiyonların Türevi .....	168
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ .....	169
SİGNUM FONKSİYONUNUN TÜREVİ .....	170
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ .....	170
TÜREVİN UYGULAMALARI .....	180
L'Hospital Kuralı .....	180
ÜSTEL BELİRSİZLİKLER .....	183
$1^\infty, 0^0, \infty^0$ Belirsizlikleri .....	183
TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU .....	185
POLİNOM – TÜREV İLİŞKİSİ .....	186
DİFERANSİYEL UYGULAMALARI .....	186
MAKSİMUM – MİNİMUM PROBLEMLERİ .....	187
Maksimum – Minimum Problemlerinde Kullanılabilecek Kısayollar .....	190
TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU .....	194
Teğet – Eğim – Türev İlişkisi .....	194
ARTAN – AZALAN FONKSİYONLAR .....	199
YEREL EKSTREMUM DEĞERLER .....	202
Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum Noktası .....	203
TÜREV – EKSTREMUM İLİŞKİSİ .....	203
Grafikte Maksimum ve Minimum Nokta Yorumu .....	205
TÜREVLENEBİLİR BİR FONKSİYONUN EĞRİLİK YÖNÜ .....	206

ASİMPTOT KAVRAMI .....	211
Düsey Asimptot.....	211
Yatay Asimptot.....	212
Eğik-Eğri Asimptot .....	213
FONKSİYONUN GRAFIKLERİ.....	215
TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER.....	215
<b>10. BÖLÜM İNTEGRAL</b>	
BELİRSİZ İNTEGRAL.....	231
TEMEL İNTEGRAL ALMA KURALLARI.....	232
İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ .....	237
A) Değişken Değiştirme Yöntemi.....	237
ÖZEL DÖNÜŞÜMLER.....	240
$\sqrt{a^2 - x^2}$ İfadesini İçeren İntegraller.....	240
$\sqrt{x^2 - a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller.....	241
$x^2 + a^2$ ve $\sqrt{x^2 + a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller.....	241
RASYONEL (KESİRLİ) İFADELERİN İNTEGRALI.....	242
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALI .....	246
İndirgeme Bağlantıları .....	248
B) Kısmi İntegrasyon Yöntemi .....	248
BELİRLİ İNTEGRAL .....	254
Riemann İntegrali.....	254
İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMLERİ .....	256
Belirli İntegrallerin Özellikleri.....	256
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALI .....	261
İNTEGRALDE ALAN .....	263
İNTEGRALDE HACİM .....	264
Kabuk Yöntemi .....	269
Eğri Uzunluğu Hesabı.....	272
Dönel Yüzeyin Alanı .....	274
Pappus – Guldin Teoremi .....	275
<b>11. BÖLÜM DİZİLER – SERİLER</b>	
DİZİ .....	278
Sonlu Dizi.....	278
Sabit Dizi.....	278
EŞİT DİZİLER.....	279
ALT DİZİ .....	279
DİZİLERDE DÖRT İŞLEM.....	280
DİZİLERDE SINIRLILIK.....	281
DİZİLERDE MONOTONLUK.....	281
ARİTMETİK VE GEOMETRİK DİZİLER .....	282
Aritmetik Dizi.....	282
Geometrik Dizi .....	283
DİZİLERDE LİMİT.....	284
Dizilerde Limit ile İlgili Özellikler.....	286
Dizilerde En Büyük Alt Sınır (Ebas) – En Küçük Üst Sınır (Eküs) Kavramları.....	287
SERİLER .....	288
Geometrik Seri.....	290
Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testleri .....	293
Genel Terim Testi .....	293
İntegral Testi .....	293
p – Testi .....	294
Karşılaştırma Testi .....	294
Karşılaştırma Testinin Limit Formu .....	294
Cauchy – Kök Testi .....	295
D’alambert Oran Testi .....	296
Limit Testi.....	297
Alterne Seriler .....	297
Mutlak Yakınsaklık – Yakınsaklık İlişkisi .....	297
KUVVET SERİLERİ.....	298
Yakınsaklık Yarıçapı.....	298
Yakınsaklık Aralığında Türevlenebilme ve İntegrasyon .....	299
Taylor ve Maclaurin Serileri.....	300
Önemli Maclaurin Seri Açılımları .....	301

12. BÖLÜM ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ.....	315
Seviye Eğrileri.....	318
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik.....	318
Süreklilik .....	321
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Türev (Kısmi Türev).....	321
Çok Değişkenli Fonksiyonların 2. Türevi .....	323
Zincir Kuralı.....	324
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Teğet Düzlem Denklemi .....	324
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA MAKSİMUM-MİNİMUM .....	325
Yerel Maksimum .....	325
Yerel Minimum .....	325
Kritik Nokta – Eyer Nokta.....	326
Kritik Nokta İçin 2. Türev Testi .....	326
Maksimum-Minimum Problemleri.....	328
Kapalı Fonksiyonun Türevi .....	328
ÇÖZÜMLÜ TESTLER.....	330

2. KISIM

13. BÖLÜM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

DİFERANSİYEL DENKLEMLER .....	424
Diferansiyel Denklemlerin Çözümü.....	425
Genel ve Özel Çözümler.....	426
Varlık ve Teklik Teoremi .....	427
Bir Eğri Ailesinin Diferansiyel Denkleminin Oluşturulması.....	428
DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR DENKLEMLER .....	430
DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR HÂLE GETİRİLEBİLEN DENKLEMLER.....	432
HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER .....	433
Homojen Diferansiyel Denklemlerin Çözümü .....	433
HOMOJEN HÂLE DÖNÜŞTÜRÜLEBİLİR DİFERANSİYEL DENKLEMLER .....	434
TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	436
İNTEGRASYON ÇARPANI YARDIMI İLE DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ .....	438
İntegrasyon Çarpanını Bulma .....	438
LİNEER DENKLEMLER .....	440
Lineer Diferansiyel Denklemin Çözüm Yöntemi .....	440
BERNOULLİ DENKLEMLERİ.....	442
RİCCATİ DENKLEMİ .....	443
BİRİNCİ MERTEBEDEN n. DERECEDEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER .....	448
Türeve, x'e veya y'ye Göre Çözülebilir Denklemler .....	448
Türeve Göre Çözülebilir Denklemler.....	448
x'e Göre Çözülebilir Denklemler .....	449
y'ye Göre Çözülebilir Denklemler .....	449
CLAİRAUT DENKLEMİ .....	450
LAGRANGE DENKLEMİ.....	451
İNDİRGENEBİLİR 2. MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER .....	452
YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	454
3. Mertebeden Homojen Olmayan Lineer Denklem.....	454
Mertebe İndirgeme.....	455
Sabit Katsayılı Denklemler.....	456
Farklı Reel Kökler .....	456
Katlı Reel Kökler .....	457
Kompleks Kök.....	457
Homojen Olmayan (2. Yanlı) Lineer Diferansiyel Denklemler.....	460
Belirsiz Katsayılar Yöntemi .....	460
PARAMETRELERİN DEĞİŞİM YÖNTEMİ .....	464
CAUCHY – EULER DENKLEMİ .....	466
ÇÖZÜMLÜ TESTLER.....	472



## POLİNOMLAR

$n \in \mathbb{N}$   $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  ve  $x$  değişken olmak üzere,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ifadesine **gerçek katsayılı tek değişkenli polinom** denir.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  polinomunda,

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  katsayılarıdır.
- $a_n$  baş katsayıdır. (Derecesi en büyük olan terimin katsayısıdır.)
- $a_0$  sabit terimdir. ( $x$ 'i içermeyen ifadedir.)
- $P(x)$  polinomunun derecesi  $\text{der}[P(x)]$  ile gösterilir ve bu polinom da  $\text{der}[P(x)] = n$ 'dir. ( $x$ 'in en büyük doğal sayı kuvvetidir.)
- $a_0 \neq 0$  olmak üzere,  $P(x) = a_0$  polinomuna **sabit polinom** denir ve sabit polinomun derecesi sıfırdır.
- $P(x) = 0$  polinomuna **sıfır polinom** denir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

## Örnek

$P(x) = 7x^4 + 6x^5 + 3x^2 + 2x - 1$  polinomunda,

Katsayılar  $\rightarrow 7, +6, 3, 2, -1$

Derece  $\rightarrow \text{der}[P(x)] = 5$

Baş katsayı  $\rightarrow 6$

Sabit terim  $\rightarrow -1$

## Örnek

$$R(x) = x^4 + 2x^{n-2} + x^{\frac{18}{n}} + 1$$

ifadesi bir polinom olduğuna göre,  $n$ 'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

$R(x)$ 'in polinom olması için  $x$ 'in kuvvetleri doğal sayı olmalıdır.

$$\frac{18}{n} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n = 1, 2, 3, 6, 9, 18 \dots \text{(i)}$$

$$n - 2 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n - 2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 2 \dots \text{(ii)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) ve (ii) den} \\ n = 2, 3, 6, 9, 18 \text{ olur.} \\ \text{Toplamları} \\ = 2 + 3 + 6 + 9 + 18 \\ = 38 \text{ bulunur.} \end{array} \right\}$$

## Örnek

$P(x) = (a - 5)x^2 + (a + 2b + 1)x + 4$  polinomu sabit polinom ve  $R(x) = (m + 4)x + n - 6$  polinomu sıfır polinom olduğuna göre,  $a + b + m + n$  toplamı kaçtır?

$$\begin{array}{l} P(x) \text{ sabit polinom ise} \left\{ \begin{array}{l} a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5 \text{ 'tir.} \\ a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 5 + 2b + 1 = 0 \\ \Rightarrow 2b = -6 \\ \Rightarrow b = -3 \text{ 'tür.} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R(x) \text{ sıfır polinom ise} \left\{ \begin{array}{l} m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \text{ 'tür.} \\ n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ 'dir.} \end{array} \right. \end{array}$$

O hâlde,  $a + b + m + n = 5 - 3 - 4 + 6 = 4$  bulunur.

Sıfır polinomda bütün katsayılar ve sabit terim sıfıra eşitlenirken sabit polinomda sadece değişkenin katsayıları sıfıra eşitlenir.

NOT

$$\begin{array}{l} R(x) \text{ sıfır polinom ise} \left\{ \begin{array}{l} m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \text{ 'tür.} \\ n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ 'dir.} \end{array} \right. \end{array}$$

O hâlde,  $a + b + m + n = 5 - 3 - 4 + 6 = 4$  bulunur.

## İki Polinom Eşitliği

$P(x)$  ve  $Q(x)$  gibi iki polinomun dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerin katsayıları da birbirine eşit ise  $P(x)$  ile  $Q(x)$  polinomlarına **eşit polinom** denir ve  $P(x) = Q(x)$  şeklinde gösterilir.

## Sabit Terim

Bir polinomun sabit terimi bulunurken verilen polinomda değişken yerine 0 (sıfır) yazılır.

$P(x)$  polinomunun sabit terimi:  $P(0)$

$P(x + 1)$  polinomunun sabit terimi:  $P(1)$

$P(x - 3)$  polinomunun sabit terimi:  $P(-3)$

Soruda hangi polinomun "sabit terimi" ve "katsayılar toplamı" sorulduğuna dikkat etmeliyiz.

NOT

## Katsayılar Toplamı

Bir polinomunun katsayılar toplamı bulunurken verilen polinomda değişken yerine 1 yazılır.

- $P(x)$  polinomunun katsayılar toplamı:  $P(1)$
- $P(x + 1)$  polinomunun katsayılar toplamı:  $P(2)$
- $P(x - 3)$  polinomunun katsayılar toplamı:  $P(-2)$
- $P(x)$  polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı:  $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$ , dir.
- $P(x)$  polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamı:  $\frac{P(1) - P(-1)}{2}$ , dir.

### Örnek

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

olduğuna göre,  $A \cdot B$  çarpımını bulalım.

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$3x+1 = Ax + A + Bx - B$$

$$A + B = 3 \text{ ve } A - B = 1 \text{ dir.}$$

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A = 4 \\ A = 2 \text{ ve } B = 1 \text{ dir.} \\ \mathbf{A \cdot B = 2 \text{ bulunur.}} \end{cases}$$

$P(x)$  bir polinom olmak üzere,  $P(a) = 0$  eşitliğini sağlayan  $a$  değerlerine  $P(x)$  polinomunun kökleri (veya sıfırları) denir.

### Örnek

$P(x + 1) = x^2 - 6x + m$  polinomu veriliyor.

$P(x - 2)$  polinomunun katsayılar toplamı 18 olduğuna göre,  $P(x)$  polinomunun sabit terimini bulalım.

$P(x - 2)$  polinomunun katsayılar toplamı:

$$P(-1) = 18 \text{ dir.}$$

$$x = -2 \text{ için } P(-1) = 4 + 12 + m = 18$$

$$16 + m = 18$$

$$m = 2 \text{ dir.}$$

**$P(x)$  polinomunun sabit terimi  $P(0) = ?$**

$$x = -1 \text{ için } P(0) = 1 + 6 + 2 = 9 \text{ bulunur.}$$

### Örnek

**$P(x)$  bir polinom olmak üzere,**

$$P(x + 3) + P(2x - 1) = 9x + 12$$

**olduğuna göre,  $P(5)$  değerini bulalım.**

$$P(x) = ax + b \text{ olsun.}$$

$$P(x + 3) = ax + 3a + b \text{ ve } P(2x - 1) = 2ax - a + b \text{ olur.}$$

$$ax + 3a + b + 2ax - a + b = 9x + 12$$

$$\Rightarrow 3ax + 2a + 2b = 9x + 12 \text{ (iki polinomunun eşitliğinden)}$$

$$\Rightarrow 3a = 9 \text{ ve } 2a + 2b = 12$$

$$\Rightarrow \mathbf{a = 3} \quad 2b = 6 \Rightarrow \mathbf{b = 3}$$

$$\Rightarrow P(x) = 3x + 3 \Rightarrow P(5) = 15 + 3 = 18 \text{ bulunur.}$$

Soruda iki polinomun toplamı 1. dereceden bir polinoma eşit ise  $P(x) = ax + b$  şeklinde seçilmelidir.

## Polinomun Derecesi ile İlgili Özellikler

$\text{der}[P(x)] = a$ ,  $\text{der}[Q(x)] = b$  ve  $a > b$  olmak üzere,

✓ $\text{der}[P(x) \mp Q(x)] = a$	✓ $\text{der}[P^n(x)] = n \cdot a$
✓ $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = a + b$	✓ $\text{der}[P(x^n)] = n \cdot a$
✓ $\text{der}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = a - b$	✓ $\text{der}[P(Q(x))] = a \cdot b$

## Polinomlarda Kalan Bulma

✓  $P(x)$  polinomunun  $x - a$  ile bölümünden kalanı bulmak için  $x$  yerine  $a$  yazılır.

→  $P(x)$  polinomunun  $(x - 3)$  ile bölümünden kalan  $P(3)$  değeridir.

→  $P(x - 1)$  polinomunun  $(x + 2)$  ile bölümünden kalan  $P(-3)$  değeridir.

✓  $P(x)$  polinomunun  $x^n - a$  ile bölümünden kalanı bulmak için  $x^n$  yerine  $a$  yazılır.

✓  $P(x)$  polinomunun  $x^2 + ax + b$  ile bölümünden kalanı bulmak için  $x^2$  yerine  $-ax - b$  yazılır.

2025

HİBRİT  
KİTAP

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

# MEB-AGS ÖABT

LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ  
SOYUT CEBİR · LİNEER CEBİR  
KONU ANLATIMLI



e-Kitaba ve video derslere  
erişebilmek için  
QR kodu okutunuz.



Fiziksel Kitap

HİBRİT  
KİTAP

e-Kitap

Video Ders Hediye

**ARTIFORCE, TÜBİTAK-TEYDEB** Destek Programından yararlanılarak geliştirilmiştir (Proje No: 7230451).  
Ürün/hizmet ile ilgili tüm sorumluluk Pegem Akademi Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Hizmetleri Tic. AŞ'ye aittir.

**PEGEM AKADEMİ**



**Komisyon**  
**MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği**  
**Soyut Cebir - Lineer Cebir Konu Anlatımlı**

ISBN 978-625-6128-13-2

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

**I. Baskı:** 2024, Ankara

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

### **İletişim**

**Pegem Akademi:** Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: [www.pegem.net](http://www.pegem.net)

E-ileti: [pegem@pegem.net](mailto:pegem@pegem.net)

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

**Baskı:**Ankara Özgür Matbaacılık  
1250. Cad. No: 25 Ostim Yenimahalle/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 46821

## ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği Soyut Cebir - Lineer Cebir 2. Kitap" adlı yayınıımız Soyut Cebir - Lineer Cebir bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB-AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı [pegem@pegem.net](mailto:pegem@pegem.net) adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi



Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

## TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

### Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



- 1 Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
- 2 Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
- 3 Konu sonu testlerini çözebilir.

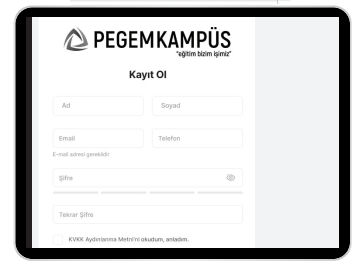


Yapay zekânın öğrenme analizinizi yapabilmesi için interaktif içeriklere etkileşim bırakmanız gerekmektedir. Etkileşim bırakmak için testlerde yer alan cevap seçeneklerini sistem üzerinde işaretlemeniz gerekmektedir. Böylelikle yapay zekâ bırakılan etkileşimler sonrasında sizlerin başarı durumlarını tespit ederek eksik tespitinizi gerçekleştirecektir.

**Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:**

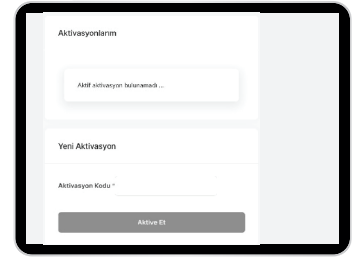
#### 1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.



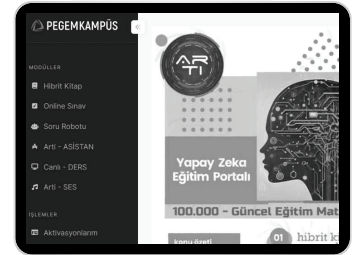
#### 2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "**Aktivasyonlarım**" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



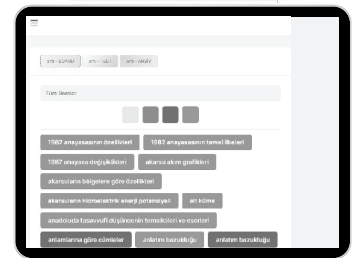
#### 3. Adım Ürünlerim

Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "**Hibrit Kitap**" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



#### 4. Adım Yapay Zekâ Asistan

Hibrit kitaptaki işaretlemeleriniz doğrultusunda eksik tespitinizi yapabilmek için menüdeki "**Arti-Asistan**" sekmesine tıklayabilirsiniz. Eksiklerinizi tamamlamak ve daha fazla içerik görmek için pegemkampus.com adresini ziyaret edebilirsiniz.



**Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2025 tarihine kadar geçerlidir.**



**Pegem Kampüs İletişim Hattı  
0312 418 51 55**

## İÇİNDEKİLER

## SOYUT CEBİR

Sayılar ve Özellikleri .....	1	Simetrik (Permütasyon) ve Alterne Gruplar .....	25
Rakam .....	1	Gruplarda Homomorfizm ve İzomorfizm .....	26
Sayma Sayıları .....	1	Homomorfizma .....	26
Doğal Sayılar .....	1	İzomorfizma .....	26
Tam Sayılar .....	1	Bölüm Grupları .....	29
Aralarında Asalılık .....	1	Devirli Gruplar .....	30
Rasyonel Sayılar .....	1	Devirli Grupların Alt Grupları .....	31
İrrasyonel Sayılar .....	1	Üreteç Sayısı .....	32
Reel Sayılar .....	1	Çarpım Grupları .....	32
Tek ve Çift Sayılar .....	1	İzomorf olmayan Abelyan Gruplar .....	33
Ardışık Sayılar .....	2	Halka, Cisim ve Tamlık Bölgesi .....	33
Negatif ve Pozitif Sayılar ile İlgili Özellikler .....	2	Alt Halka .....	35
Tam Sayılarda Bölünebilme .....	2	Sıfır Bölenler ve Tamlık Bölgesi .....	35
En Büyük Ortak Bölen .....	4	Bölüm Halkası .....	36
En Küçük Ortak Kat .....	4	İdeal .....	36
Euler $\phi$ -Fonksiyonu .....	7	Nilpotent Eleman .....	36
$\phi$ -Fonksiyonunun Bazı Özellikleri .....	7	Polinom Halkası .....	36
Kongrüanslar .....	9	Cisim .....	37
Tam Sayılar ve Modüler Aritmetik .....	9	Cebirsel Sayı .....	37
Gruplar .....	19	Transandant Sayı .....	37
Tek İşlemlili Cebirsel Yapı Türleri .....	19	Sayılabilir Küme .....	37
Mertebe .....	21	Çözümlü Test 1 .....	43
Alt Gruplar .....	22	Çözümlü Test 2 .....	47
Normal Alt Gruplar .....	24	Çözümlü Test 3 .....	51
		Çözümlü Test 4 .....	55

## LİNEER CEBİR

Hatırlatma: İç İşlem.....	59	Alterne ve Çok Lineer Fonksiyonlar.....	115
Dış İşlem.....	59	n-Linear Fonksiyonlar.....	115
Grup.....	59	Bir Lineer Dönüşümün Determinantı ve İzi.....	116
Alt Grup .....	59	Determinantlarda Alan ve Hacim Hesabı .....	116
Halka .....	59	Matrislerin Polinomu .....	117
Vektör Uzayları .....	60	Karakteristik Değerler ve Karakteristik	
Alt Vektör Uzayı .....	62	Vektörler .....	118
Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık .....	66	Karakteristik Uzay .....	119
Taban (Baz).....	67	Karakteristik Polinom ve Karakteristik	
İç Çarpım Uzayları.....	68	Denklemler .....	120
İç Çarpım.....	68	Çözümlü Test 1.....	127
Norm .....	70	Çözümlü Test 2.....	132
Ortonormal Baz .....	75	Çözümlü Test 3.....	136
Direkt Toplam Uzayı .....	80	Çözümlü Test 4.....	140
İç Çarpım Uzaylarının Alt Uzayları.....	81	Çözümlü Test 5.....	144
Lineer Dönüşümler .....	83		
Matrisler ve Matris Uzayları .....	90		
Matris Toplamı .....	91		
Skaler ile Matris Çarpımı.....	92		
Matris Çarpımı.....	92		
Bir Matrisin Transpozu .....	93		
Kare Matrisler.....	94		
Bir Matrisin Tersisi.....	94		
Elemanter Operasyonlar (Basit İşlemler).....	104		
Determinantlar .....	105		
Sarrus Kuralı .....	106		
Minör ve Kofaktör .....	108		



## SOYUT CEBİR

## 1. Sayılar ve Özellikleri

## Rakam

Sayıları yazmaya yarayan sembollere rakam denir. Kullandığımız onluk sistemdeki rakamların kümesi  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  dur.

Rakamlarla oluşturulan ifadelere sayı denir.

## Sayma Sayıları

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  kümesi sayma sayılar kümesidir.

## Doğal Sayılar

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  kümesidir.  $N^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$  pozitif doğal sayılar kümesini ifade eder.

## Tam Sayılar

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  kümesidir.

Tam sayılar kümesi üç ana bölümden oluşur. Negatif tam sayılar ( $Z^-$ ), pozitif tam sayılar ( $Z^+$ ) ve  $\{0\}$  kümesidir. Ayrıca  $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$  dir.

## Aralarında Asallık

$p$  ve  $q$  sıfırdan farklı iki pozitif tam sayı olsun.  $p$  ve  $q$  sayılarını ortak olarak bölen en büyük pozitif tam sayı 1 ise  $p$  ve  $q$  aralarında asaldır denir.

## Rasyonel Sayılar

$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \text{ ve } q \text{ aralarında asal, } q \neq 0 \right\}$  kümesidir.

## İrrasyonel Sayılar

$I = Q'$  sembolleriyle gösterilir yukarıda tanımlanan  $\frac{p}{q}$  tipinde yazılamayan sayılardan oluşur. Yani rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayı denir.

## Reel Sayılar

Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşim kümesidir.  $R$  ile gösterilir.  $R = Q \cup Q'$  dir.

## Örnek

$x, y, z \in Z$  olmak üzere,

$$x \cdot y = 12, y \cdot z = 4 \text{ ve } x \cdot z = 3$$

eşitliklerini sağlayan  $x, y, z$  sayılarının en büyük toplamı en küçük toplamından kaç fazladır?

- A) 12    B) 14    C) 16    D) 18    E) 20

## Çözüm

$$\frac{x \cdot y}{y \cdot z} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{x}{z} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot z \text{ bulunur.}$$

Bu ifade  $x \cdot z = 3$  eşitliğinde yerine yazılırsa

$$3z^2 = 3 \Rightarrow z = \mp 1 \text{ bulunur.}$$

$$z = 1 \text{ için } x = 3 \text{ ve } y = 4 \text{ olup } x + y + z = 8$$

$$z = -1 \text{ için } x = -3 \text{ ve } y = -4 \text{ olup } x + y + z = -8 \text{ bulunur.}$$

$8 - (-8) = 16$  dir. Doğru seçenek C olarak elde edilir.

## Örnek

$a, b, c \in N$  olmak üzere

$3a + 6b - c = 24$  eşitliğini sağlayan  $a, b$  ve  $c$  değerleri için  $a + b + c$  toplamının en küçük değeri kaçtır?

- A) 2    B) 4    C) 6    D) 8    E) 10

## Çözüm

Katsayısı büyük olana büyük değer verilir.

Sayılar aynı olabileceğinden  $a = 0 = c$  seçilirse  $b = 4$  bulunur.

$$a + b + c = 4 \text{ olur.}$$

## Örnek

$a$  ve  $b$  doğal sayılardır.

$$56 \cdot a = b^3$$

eşitliğini sağlayan en küçük  $b$  değeri kaçtır?

## Çözüm

Önce sayı asal çarpanlarına ayrılır.

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

$$56 \cdot a = 2^3 \cdot 7 \cdot a = b^3 \text{ tür.}$$

Buradan  $a = 7^2$  seçilirse  $b = 2 \cdot 7 = 14$  bulunur.

## Tek ve Çift Sayılar

2 ile kalansız bölünebilen tam sayılara çift tam sayı, 2 ile tam bölünemeyen tam sayılara tek tam sayı denir. Çift sayılar  $2n$ , tek tam sayılar  $2n - 1$  ile gösterilir ( $n \in Z$ ).

## Tek ve Çift Tam Sayılar İle İlgili Özellikler

- 1)  $T \mp T = \text{Ç}$     5)  $\text{Ç} \cdot \text{Ç} = \text{Ç}$   
 2)  $\text{Ç} \mp \text{Ç} = \text{Ç}$     6)  $T \cdot T = T$   
 3)  $T \mp \text{Ç} = T$     7)  $n \in N$  olmak üzere  $T^n = T$   
 4)  $T \cdot \text{Ç} = \text{Ç}$     8)  $n \in N^+$  olmak üzere  $\text{Ç}^n = \text{Ç}$  dir.

Tek ve çift sayılarda bölme işlemine ait kural tanımlanamaz. Örneğin 60, 40 ve 2 sayıları çift sayıdır.

$\frac{40}{2} = \text{Ç}$ ,  $\frac{40}{40} = T$ ,  $\frac{40}{60}$  sayısı ne tek ne de çifttir.

NOT!

**Ardışık Sayılar**

$n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $n, n + 1, n + 2, \dots$  sayılarına ardışık tam sayılar denir.

**Kural:**

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \text{ dir.}$$

$n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $2n - 1, 2n + 1, 2n + 3, \dots$  sayılarına ardışık tek sayılar denir.

**Kural:**

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 \text{ dir.}$$

$n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $2n, 2n + 2, 2n + 4, \dots$  sayılarına ardışık çift sayılar denir.

**Kural:**

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1) \text{ dir.}$$

**Kural:**

Ardışık terimleri arasındaki artış miktarı eşit olan dizide

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$$

ve

$$\text{Terim Toplamı} = \frac{\text{Terim Sayısı} \cdot (\text{Son terim} + \text{İlk terim})}{2}$$

dir.

**Negatif ve Pozitif Sayılar İle İlgili Özellikler**

- 1)  $(-)\cdot(-) = (+)$                       5)  $(-)/(-) = (+)$
- 2)  $(-)\cdot(+) = (-)$                       6)  $(-)/(+) = (-)$
- 3)  $(+)\cdot(+) = (+)$                       7)  $(+)/(+) = (+)$
- 4)  $(+)\cdot(-) = (-)$                       8)  $(+)/(-) = (-)$

9)  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $(-)^{2n} = (+)$  dir.

10)  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $(-)^{2n-1} = (-)$  dir.

11)  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $(+)^n = (+)$  dir.

**Tam Sayılarda Bölünebilme**

$m, n, r \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $m \cdot n = r$  olsun. Bu durumda  $m$  ve  $n$  ye  $r$  nin bölenleri (çarpanları)  $r$  ye de  $m$  ve  $n$  nin bir katı denir.  $m, r$  nin bir böleni ise bu durum  $m \mid_r$  ile, aksi takdirde

$m \nmid_r$  ile gösterilir.

**2 ile bölünebilme:** Çift tam sayılar 2 ile tam bölünür.

**3 ile bölünebilme:** Verilen sayının rakamları toplamı 3 veya 3 ün katı ise sayı 3 ile tam bölünür.

**4 ile bölünebilme:** Verilen sayının son iki basamağı (birler ve onlar basamağı) 4 ile tam bölünebiliyor ise verilen sayı 4 ile tam bölünür.

**5 ile bölünebilme:** Verilen sayının birler basamağı 0 veya 5 ise sayı 5 ile tam bölünür.

**7 ile bölünebilme:** Verilen sayının rakamları altına sağdan sola doğru sırasıyla 1, 2, 3 sayıları yazılır. Bu rakamlar altlarına yazdığımız sayılar ile çarpılır. Daha sonra sağdan sola üçerli gruplar hâlinde alınıp bu gruplar (+), (-) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 7 veya 7'nin katı ise verilen sayı 7 ile tam bölünür.

**8 ile bölünebilme:** Verilen sayının son üç basamağı (birler, onlar ve yüzler basamağı) 8 ile bölünebiliyor ise sayı 8'e tam bölünür.

**9 ile bölünebilme:** Verilen sayının rakamları toplamı 9 veya 9 un katı ise sayı 9 ile tam bölünür.

**10 ile bölünebilme:** Verilen sayının birler basamağı 0 ise verilen sayı 10 ile tam bölünür.

**11 ile bölünebilme:** Verilen sayı sağdan sola doğru sırası ile (+), (-) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 11 veya 11 in katı ise verilen sayı 11 ile tam bölünür.

**Örnek**

Hangi  $n$  doğal sayıları için  $(n+1) \mid_{(n^2+1)}$  dir.

**Çözüm**

$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$  olduğundan  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$(n+1) \mid_{(n^2-1)} \text{ dir.}$$

$$(n+1) \mid_{(n^2+1)} \text{ ve } (n+1) \mid_{(n^2-1)} \text{ olduğundan}$$

$$n+1 \mid_{[(n^2+1)-(n^2-1)]} \Rightarrow n+1 \mid_2 \text{ olur.}$$

$n \in \mathbb{N}$  olduğundan ve  $n + 1 \leq 2$  olması gerektiğinden  $n = 0, 1$  elde edilir.

**Kural:**

$[1, x]$  aralığında  $n$  ile bölünebilen doğal sayıların sayısı

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \text{ dir.}$$

**Kural:**

$a \in \mathbb{Z}$  ve  $m, n \in \mathbb{N}$  olsun.

$$n < m \text{ için } a^{2^n+1} \mid_{a^{2^m-1}} \text{ dir.}$$

**Kural:**

$n \geq 2$  olmak üzere  $n$  ve  $k$  iki doğal sayı olsun.

$$n-1 \mid_{n^k-1} \text{ dir.}$$

**Kural:**

$n$  bir doğal sayı ve  $k$  bir tek sayı olsun.

$$(1 + 2 + \dots + n) \mid (1^k + 2^k + \dots + n^k) \text{ dir.}$$

**Kural:**

$a, b \in \mathbb{Z}$  olsun.  $a$  sayısı  $b$  ile bölündüğünde kalan  $r$  ise  $2^a - 1$  sayısı  $2^b - 1$  ile bölündüğünde kalan  $2^r - 1$  dir.

**Örnek**

$\{1, 2, \dots, 600\}$  dizisinde 13 ile bölünebilen kaç tane doğal sayı vardır?

**Çözüm**

$$\left\lfloor \frac{600}{13} \right\rfloor = 46 \text{ adettir.}$$

**Örnek**

1000 den küçük kaç doğal sayı 17 ile bölünür?

**Çözüm**

$[1, 1000]$  kümesinde

$$\left\lfloor \frac{1000}{17} \right\rfloor = 58 \text{ ve } 0 \in \mathbb{N} \text{ için } 17 \mid_0 \text{ olup toplam } 58 + 1 = 59$$

adet sayı 17 ile tam bölünür.

**Örnek**

$N = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n + 1)$  sayısının 41 ile bölünebilmesi için  $n$  en az kaç olmalıdır?

**Çözüm**

$$\begin{aligned} N &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n + 1) \\ &= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) \\ &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n) \\ &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \\ &= \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3} \end{aligned}$$

sayısının 41 ile bölünebilmesi için  $n(n + 1)(n + 2)$  çarpanlarından en az biri 41 e bölünmelidir.

$$n + 2 = 41 \Rightarrow n = 39 \text{ olmalıdır.}$$

**Teorem:**

$m, n$  ve  $r$  tam sayı olmak üzere,

- $\forall m \in \mathbb{Z}$  iken  $a \mid_0$  dir.
- $\forall m \in \mathbb{Z}$  için  $\pm 1 \mid_m$  ve  $\pm m \mid_m$  dir.
- $m \mid_{\pm 1} \Leftrightarrow m = \mp 1$  dir.
- $m \mid_n$  ise  $\pm m \mid_{\pm n}$  dir.
- $m \mid_n$  ve  $n \mid_r$  ise  $m \mid_r$  dir.
- $m \mid_n$  ve  $n \mid_m$  ise  $m = \pm n$  dir.
- $c \neq 0$  olmak üzere  $cm \mid_{cn}$  ise  $m \mid_n$  dir.
- $m_1 \mid_{n_1}$  ve  $m_2 \mid_{n_2}$  ise  $m_1 \cdot m_2 \mid_{n_1 \cdot n_2}$  dir.
- $m \mid_n$  ve  $m \mid_r$  ise  $m \mid_{n+r}$  dir.

**Çıkış Sorular**

$k \mid_m$  gösterimi  $k$  sayısının  $m$  sayısını tam bölündüğünü ifade eder.

Buna göre  $a, b$  ve  $c$  tam sayıları için,

- $c \mid a \cdot b$  ise  $c \mid a$  ve  $c \mid b$  dir.
- $a \cdot b \mid_c$  ise  $a \mid_c$  ve  $b \mid_c$  dir.
- $a \mid_b$  ve  $b \mid_c$  ise  $a \mid_c$  dir.

yargılarından hangileri **daima** doğrudur?

- A) Yalnız I                      B) I ve II                      C) I ve III  
D) II ve III                      E) Yalnız III

**Çözüm**

$c$  sayısı  $a \cdot b$  yi bölüyor ise  $c \mid_a$  ve  $c \mid_b$  doğru olmayabilir,  $6 \mid_{2 \cdot 3}$  tür ama  $6 \mid_2$  ve  $6 \mid_3$  yanlıştır. II ve III. öncül doğrudur.

**Cevap D**

**Tanım:**

(Asal Sayı) :  $n > 1$  tam sayısının kendisinden ve birden başka pozitif böleni yoksa  $n$ 'ye asal (= prime) sayı denir.

**Tanım:**

(Bileşik Sayı): Asal olmayan sayılara bileşik (= combined) sayı denir.

**Tanım:**

Aralarındaki fark iki olan asal sayılara ikiz asallar denir.

**Teorem:**

Her bileşik sayının en az bir asal çarpanı vardır.

**Teorem (Euclid):**

Asal sayıların sayısı sonsuzdur.

2025

HİBRİT  
KİTAP

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

# MEB-AGS ÖABT

LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ  
GEOMETRİ - İSTATİSTİK VE OLASILIK  
KONU ANLATIMLI



e-Kitaba ve video derslere  
erişebilmek için  
QR kodu okutunuz.



Fiziksel Kitap

HİBRİT  
KİTAP

e-Kitap

Video Ders Hediye

**ARTIFORCE, TÜBİTAK-TEYDEB** Destek Programından yararlanılarak geliştirilmiştir (Proje No: 7230451).  
Ürün/hizmet ile ilgili tüm sorumluluk Pegem Akademi Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Hizmetleri Tic. AŞ'ye aittir.

**PEGEM AKADEMİ**



**Komisyon**  
**MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Geometri - İstatistik ve Olasılık**  
**Konu Anlatımlı**

ISBN 978-625-6128-13-2

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

**I. Baskı: 2024, Ankara**

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

### İletişim

**Pegem Akademi:** Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: [www.pegem.net](http://www.pegem.net)

E-ileti: [pegem@pegem.net](mailto:pegem@pegem.net)

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

**Baskı:**Ankara Özgür Matbaacılık  
1250. Cad. No: 25 Ostim Yenimahalle/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 46821

## ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği Geometri-İstatistik ve Olasılık 3. Kitap" adlı yayınıımız Geometri - İstatistik ve Olasılık bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB-AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı [pegem@pegem.net](mailto:pegem@pegem.net) adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi



Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

## TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

### Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



- 1 Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
- 2 Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
- 3 Konu sonu testlerini çözebilir.

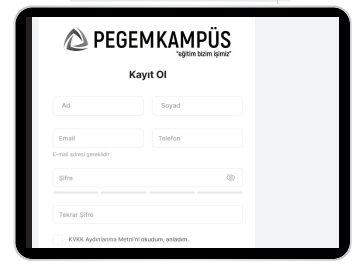


Yapay zekânın öğrenme analizinizi yapabilmesi için interaktif içeriklere etkileşim bırakmanız gerekmektedir. Etkileşim bırakmak için testlerde yer alan cevap seçeneklerini sistem üzerinde işaretlemeniz gerekmektedir. Böylelikle yapay zekâ bırakılan etkileşimler sonrasında sizlerin başarı durumlarını tespit ederek eksik tespitinizi gerçekleştirecektir.

**Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:**

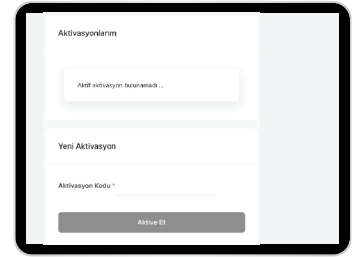
#### 1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.



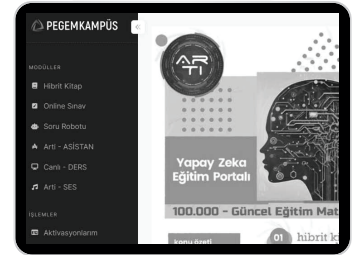
#### 2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "**Aktivasyonlarım**" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



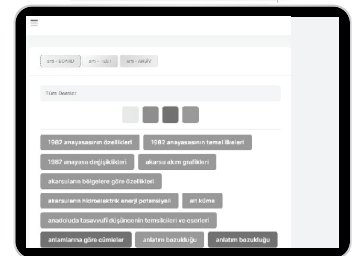
#### 3. Adım Ürünlerim

Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "**Hibrit Kitap**" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



#### 4. Adım Yapay Zekâ Asistan

Hibrit kitaptaki işaretlemeleriniz doğrultusunda eksik tespitinizi yapabilmek için menüdeki "**Arti-Asistan**" sekmesine tıklayabilirsiniz. Eksiklerinizi tamamlamak ve daha fazla içerik görmek için pegemkampus.com adresini ziyaret edebilirsiniz.



**Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2025 tarihine kadar geçerlidir.**



**Pegem Kampüs İletişim Hattı  
0312 418 51 55**

## İÇİNDEKİLER

## 1. BÖLÜM

## UZAYDA VEKTÖRLER

UZAYDA VEKTÖRLER.....	1
İki Vektörün Parallellığı.....	2
Vektörlerin Lineer Bileşimi.....	2
Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık.....	2
Standart Birim Vektörleri.....	2
Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı.....	2
İki Vektör Arasındaki Açık.....	3
Dik İzdüşüm Vektörü.....	3
Vektörel (Çapraz) Çarpım.....	4
Paralelkenarın Alanı.....	5
Paralelyüzün Hacmi.....	6
Çözümlü Test.....	9
Çözümler.....	11

## UZAYDA DOĞRU ve DÜZLEM DENKLEMİ

UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEM DENKLEMİ.....	13
İki Noktası Belli Olan Doğru Denklemi.....	13
Düzlem.....	14
Çözümlü Sorular - I.....	16
Bir Noktanın Düzleme Uzaklığı.....	19
Çözümlü Sorular - II.....	19
Uzayda İki Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları ve Kesişme Noktasının Bulunması.....	22
Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı.....	23
Aykırı İki Doğru Arasındaki En Kısa Uzaklık ve Ortak Dikme ve Dikme Ayaklarının Bulunması.....	24
Çözümlü Sorular.....	24
İki Düzlemin Birbirlerine Göre Konumu ve İki Düzlem Arasındaki Açık.....	28
Bir Düzlem ile Bir Doğru Arasındaki Açık.....	28
İki Düzlemin Açıkortay Düzlemi.....	28
Çözümlü Sorular.....	28
Bir Doğrudan Geçen Düzlem Demeti.....	30
Uzayda Simetri.....	31
Çözümlü Sorular.....	32
Çözümlü Test - 1.....	37
Çözümler.....	39

Çözümlü Test - 2.....	41
Çözümler.....	43

## YÜZEYLER

$E^3$ DE YÜZEY.....	46
KÜRE.....	46
Küre Olma Koşulları.....	47
Kürenin Parametrik Denklemi.....	48
Kürenin Teğet Düzlemi.....	48
SİLİNDİR.....	48
KONİ.....	50
Bazı Kuadratik Yüzeyleler.....	54
Çözümlü Sorular.....	54
Silindirin İsimlendirilmesi.....	55
Dönel Yüzeyleler.....	57
SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR.....	59
KÜRESEL KOORDİNATLAR.....	59
Çözümlü Test.....	60
Çözümler.....	62

## KONİKLER

TANIM.....	64
Genel Konik Denkleminde $x, y$ -li Terimi Yok Etme.....	64

## ELİPS - HİPERBOL - PARABOL

ELİPS.....	66
Elipsin Denklemi.....	66
Elipsin Teğet ve Normal Denklemleri.....	67
Elipsin Parametrik Denklemi.....	68
HİPERBOL.....	70
Hiperbolün Denklemi.....	70
PARABOL.....	73
Parabolün Denklemi.....	73
Çözümlü Test.....	82
Çözümler.....	84
Karma Test - 1.....	86
Çözümler.....	88
Karma Test - 2.....	90
Çözümler.....	92



## 2. BÖLÜM

### İSTATİSTİK VE OLASILIK

TEMEL KAVRAMLAR.....	94
Sayısal Bilgi, Veri, Ölçüm .....	94
Değişken ve Türleri.....	94
Fonksiyon .....	94
Evren ve Örneklem.....	96
İstatistik ve Parametre.....	96
Çözümlü Test.....	97
Çözümler .....	99

### VERİNİN DÜZENLENMESİ VE MERKEZE EĞİLME ÖLÇÜLERİ

VERİNİN DÜZENLENMESİ.....	100
Grafik Çizme.....	100
Merkeze Eğilme (Yığılma) Ölçüleri.....	101
Mod (Tepe Değer).....	101
Medyan (Ortanca).....	101
Aritmetik Ortalama.....	102
Mod, Medyan ve Ortalamanın Karşılaştırılması	103
Ağırlıklı Ortalama.....	104
DEĞİŞME (DAĞILMA) ÖLÇÜLERİ .....	105
Ranj (Açıklık) .....	105
Mutlak Kayma.....	105
Varyans ve Standart Kayma .....	105
Bağıl Değişkenlik Katsayısı .....	107
STANDARTLAŞTIRMA (z ve T PUANLARI).....	107
z Puanı .....	107
T Puanı .....	107
Çözümlü Test.....	109
Çözümler .....	112

## OLASILIK

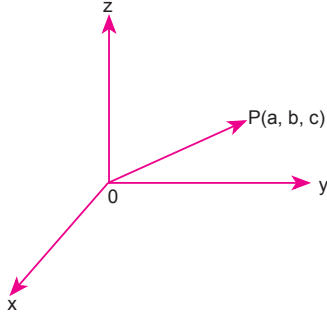
TEMEL KAVRAMLAR.....	114
Olasılık.....	115
Birleşik Olayların Olasılığı .....	116
Ayrık İki Olayın Birleşiminin Olasılığı.....	116
Olaylar Arasındaki Bağlılıklar .....	117
Şartlı Olaylar ve Olasılıklar .....	117
Bağımsız Olaylar .....	118
Çözümlü Sorular.....	119
TESADÜFİ DEĞİŞKEN, OLASILIK FONKSİYONU VE BEKLENEN DEĞER.....	121
Tesadüfi Değişkenin Beklenen Değeri.....	127
Varyans Hesabı .....	130
Momentler.....	133
Moment Çıkarıcı Fonksiyon.....	133
Birleşik Olasılık Dağılımı.....	135
Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu.....	135
Marjinal Olasılık Fonksiyonları.....	136
Kovaryans ve Korelasyon.....	138
Çözümlü Test.....	145
Çözümler .....	148

### OLASILIK DAĞILIMLARI

OLASILIK.....	150
Binom Olasılık Dağılımı .....	150
Poisson Olasılık Dağılımı .....	152
Hipergeometrik Olasılık Dağılımı.....	153
Normal Olasılık Dağılımı.....	160
Standart Normal Olasılık Dağılımı .....	161
Çözümlü Test.....	163
Çözümler .....	166
Çözümlü Deneme - 1 .....	168
Çözümler .....	171
Çözümlü Deneme - 2.....	174
Çözümler .....	177

## UZAYDA VEKTÖRLER

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$  kümesine 3 boyutlu vektör uzayı denir. Vektörlerin başlangıç noktası orijin olmak üzere,  $\mathbb{R}^3$  ün her noktasına bir vektör karşılık gelir.



$\vec{OP} = (a, b, c)$  ise a, b, c sayılarına  $\vec{OP}$  yer vektörünün bileşenleri denir. P noktasının orijine olan uzaklığına,  $\vec{OP}$  vektörünün normu (uzunluğu) denir ve  $|\vec{OP}|$  ile gösterilir.

$\vec{OP} = (a, b, c) \Rightarrow |\vec{OP}| = |\vec{P}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  dir.

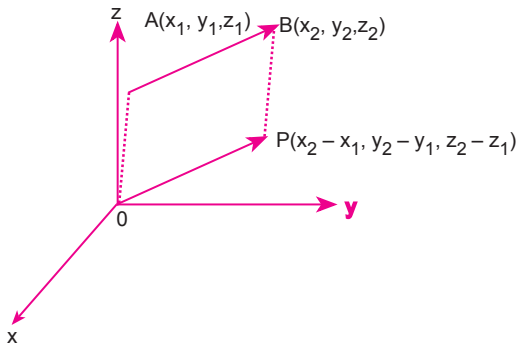
$\vec{AB}$  vektörüne eş, başlangıç noktası orijin olan  $\vec{OP}$  vektörüne,  $\vec{AB}$  vektörünün yer vektörü denir.

$A(x_1, y_1, z_1)$  ve  $B(x_2, y_2, z_2)$  ise;

$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$|\vec{OP}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Normu 1 olan vektöre birim vektör denir.



## Çıkış Sorular

Uzayda  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, -1, -4)$  ve  $C(m, 2, -1)$  noktaları veriliyor.

$\vec{AB} \perp \vec{AC}$  olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -27 B) -29 C) 14 D) 29 E) 27

## Çözüm

$$\vec{AB} = (1, -3, -7) \quad \vec{AC} = (m - 1, 0, -4)$$

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ dir.}$$

$$1(m - 1) + (-3) \cdot 0 + (-7)(-4) = 0$$

$$m + 27 = 0$$

$$m = -27 \text{ olur.}$$

**Cevap A**

## Örnek

$A(1, -1, 1)$  ve  $B(2, a, -3)$  noktaları veriliyor.

$|\vec{AB}| = \sqrt{26}$  br olduğuna göre a sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

## Çözüm

$$\vec{AB} = (1, a + 1, -4)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{26} \Rightarrow \sqrt{1^2 + (a + 1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 + 17 = 26$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow |a + 1| = 3 \Rightarrow a = 2 \text{ veya } a = -4$$

## Çıkış Sorular

Dik koordinat düzleminde verilen  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  vektörleri için  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ ,  $\|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 16$  olduğuna göre,  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$  değeri kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

## Çözüm

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$\frac{(\|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\|) \cdot (\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\|)}{16} = 4 \cdot 8$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\| = 2$$

$$+ \|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 16$$

$$2 \cdot \|\vec{u} + \vec{v}\| = 18 \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = 9 \text{ olur.}$$

**Cevap B**

**İki Vektörün Paralellliği**

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ,  $k \neq 0$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  olmak üzere,

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b} \text{ dir.}$$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  ve  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  olmak üzere

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \text{ dir.}$$

**Örnek**

A(2, 4, 2) ve B(6, 2, 4) noktaları ile

$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$  vektörü veriliyor.

$\vec{AB} // \vec{v}$  olduğuna göre, (x, y) ikilisini bulunuz.

**Çözüm**

$$\vec{AB} = (4, -2, 2)$$

$$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$$

$$\vec{AB} // \vec{v} \Rightarrow \frac{x - y}{4} = \frac{x + 2y}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) = (1, -1) \text{ olur.}$$

**Vektörlerin Lineer Bileşimi**

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n \in \mathbb{R}^3$  ve  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{R}$

olmak üzere,

$\vec{u} = k_1 \cdot \vec{V}_1 + k_2 \cdot \vec{V}_2 + k_3 \cdot \vec{V}_3 + \dots + k_n \cdot \vec{V}_n$  vektörüne,

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$  vektörlerinin lineer bileşimi denir.

**Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık**

$\mathbb{R}^3$  de  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$  vektörleri verilsin.

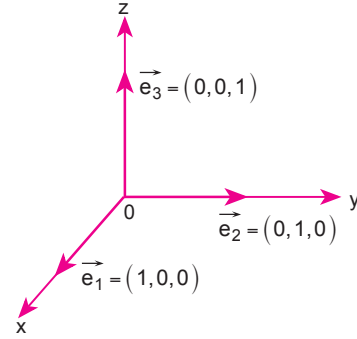
$c_1 \cdot \vec{V}_1 + c_2 \cdot \vec{V}_2 + c_3 \cdot \vec{V}_3 + \dots + c_n \cdot \vec{V}_n = \vec{0}$  denklemi yalnız

$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$  için sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımsız;  $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$  değerlerinden en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımlı denir.

$V = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\}$ ,  $\mathbb{R}^3$  uzayının bir alt kümesi olmak üzere  $\det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n) = A$  olsun.

I.  $A = 0 \Leftrightarrow V$  kümesi lineer bağımlı,

II.  $A \neq 0 \Leftrightarrow V$  kümesi lineer bağımsızdır denir.

**Uyarı!****Standart Birim Vektörleri**

$\mathbb{R}^3$  vektör uzayında üzerinde bulunduğu eksen ile pozitif yönlü birim vektörlere, standart birim vektörler denir.

$$\vec{e}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_3 = \vec{k} = (0, 0, 1)$$

**Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı**

Her  $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$  için;

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$  ve  $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$  olmak üzere,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

şeklinde tanımlanan işleme, " $\mathbb{R}^3$  de Öklid iç çarpım işlemi" denir.

Özellikleri

- $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$ ,  $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$  (değişme özelliği)
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$  (çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)

## 1.BÖLÜM

## Örnek

$\vec{A} = (3, a, -2)$  ve  $\vec{B} = (a, 2, 10)$  vektörleri veriliyor.  
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 5$  olduğuna göre  $a$  sayısının kaç olacağını bulunuz.

## Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= 5 \\ 3a + 2a - 2 \cdot 10 &= 5 \\ 5a &= 25 \\ a &= 5\end{aligned}$$

## İki Vektör Arasındaki Açık

$\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$  verilsin.  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri arasındaki açının ölçüsü  $\alpha$  olmak üzere,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha \text{ olur.}$$

$\vec{A} \perp \vec{B}$  ise  $\alpha = 90^\circ$  için  $\cos \alpha = 0$  olduğundan  
 $\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  olur.

## Örnek

$\vec{A} = (-1, 2, 3)$  ve  $\vec{B} = (1, -1, 2)$  vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.

## Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta \\ -1 - 2 + 6 &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}\end{aligned}$$

## Örnek

$\vec{A} = (1, 1, 2)$  ve  $\vec{B} = (\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, 4)$  vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.

## Çözüm

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 + 8 = 6 \\ |\vec{A}| &= \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{B}| &= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (-\sqrt{3} - 1)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} + 16} \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \\ \cos \theta &= \frac{6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} \text{ olur.} \\ \cos \theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

## Örnek

$\vec{A}$  ile  $\vec{B}$  vektörleri arasındaki açının ölçüsü  $45^\circ$ ,

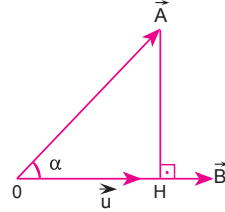
$|\vec{A}| = 2\sqrt{2}$  ve  $|\vec{B}| = 3$  olduğuna göre,

$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (3\vec{A} - 2\vec{B})$  iç çarpımının sonucunu bulunuz.

## Çözüm

$$\begin{aligned}(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (3\vec{A} - 2\vec{B}) &= 3 \cdot \vec{A} \cdot \vec{A} + 3 \cdot \vec{A} \cdot \vec{B} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} - 2 \cdot \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= 3 \cdot |\vec{A}|^2 + \vec{A} \cdot \vec{B} - 2 \cdot |\vec{B}|^2 \\ &= 3 \cdot 8 + 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ - 2 \cdot 9 \\ &= 24 + 6 - 18 \\ &= 12 \text{ olur.}\end{aligned}$$

## Dik İzdüşüm Vektörü



$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1), \vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$  vektörleri verilsin.

$\vec{A}$  vektörünün  $\vec{B}$  vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü

$\vec{OH} = \vec{u}$  olsun.  $\vec{A}$  ile  $\vec{B}$  arasındaki açı  $\alpha$  olmak üzere;

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \text{ dir. } \cos \alpha = \frac{\|\vec{u}\|}{|\vec{A}|} \text{ yazılırsa}$$

$$\frac{\|\vec{u}\|}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \Rightarrow \|\vec{u}\| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \text{ dik izdüşüm vektörü-}$$

nün uzunluğudur.

$$\vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \text{ olacağından}$$

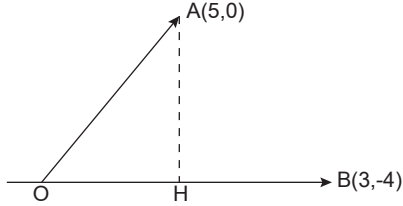
$$\vec{u} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \cdot \vec{B} \text{ dik izdüşüm vektörünü verir.}$$

## Çıkış Sorular

Düzlemde  $A(5, 0)$  vektörünün  $B(3, -4)$  vektörü üzerine dik izdüşüm vektörünün uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

## Çözüm



$$\|OH\| = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{B}\|}$$

$$\|OH\| = \frac{5 \cdot 3 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\|OH\| = 3 \text{ br bulunur.}$$

**Cevap C**

## Örnek

$\vec{A} = (1, 4, 2)$  ve  $\vec{B} = (-2, 1, 3)$  vektörleri veriliyor.

$\vec{A}$ 'nın  $\vec{B}$  üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğunun ve dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

## Çözüm

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{-2 + 4 + 6}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

Dik izdüşüm vektörü;

$$\vec{u} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \cdot \vec{B} = \frac{8}{14} \cdot (-2, 1, 3) = \frac{4}{7}(-2, 1, 3) \text{ olur.}$$

## Vektörel (Çapraz) Çarpım

$\mathbb{R}^3$  te  $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$  ve  $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$  vektörleri verilsin.

$\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin vektörel çarpımı bir  $\vec{C}$  vektörünü verir.

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  şeklinde gösterilir.

$\alpha: \vec{A}$  vektörü ile  $\vec{B}$  vektörü arasındaki açı

$\vec{P}; \vec{A}$  vektörü ile  $\vec{B}$  vektörünün yönünü gösteren birim vektör olmak üzere;

$\vec{A}$  ile  $\vec{B}$  nin vektörel çarpımı :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{P} \cdot \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \alpha \text{ dir.}$$

Elde edilen  $\vec{C}$  vektörü,  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin ait olduğu düzleme dik olan bir vektördür.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri, vektörel çarpımı verir.

## Örnek

$\vec{A} = (3, 1, 0)$  ve  $\vec{B} = (0, 1, 2)$  olduğuna göre,

$\|\vec{A} \times \vec{B}\|$  kaçtır?

## Çözüm

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} \\ = (2, -6, 3)$$

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} \\ = \sqrt{4 + 36 + 9} \\ = 7 \text{ olur.}$$

## Özellikleri:

$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{R}^3$  ve  $k \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

I.  $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

II.  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

III.  $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

IV.  $(k \cdot \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k \cdot \vec{B}) = k \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), k \in \mathbb{R}$

V.  $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \theta$  ( $\theta$ :  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri arasındaki açıdır.)

VI.  $\left. \begin{matrix} \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \rangle = 0 \\ \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{B} \rangle = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{A} \times \vec{B} \text{ ve } \vec{B} \perp \vec{A} \times \vec{B} \text{ dir.}$