

2025

HİBRİT
KİTAP

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

MEB-AGS

ÖABT

İLKÖĞRETİM MATEMATİK
ÖĞRETMENLİĞİ

ANALİZ

KONU ANLATIMLI



e-Kitaba ve video derslere
erişebilmek için
QR kodu okutunuz.



Fiziksel Kitap

HİBRİT
KİTAP

e-Kitap

Video Ders Hediyesi

ARTIFORCE, TÜBİTAK-TEYDEB Destek Programından yararlanılarak geliştirilmiştir (Proje No: 7230451).
Ürün/hizmet ile ilgili tüm sorumluluk Pegem Akademi Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Hizmetleri Tic. AŞ'ye aittir.



PEGEM AKADEMİ



Komisyon

MEB-AGS ÖABT İlköğretim Matematik Öğretmenliği Analiz Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6128-17-0

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

I. Baskı: 2024, Ankara

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: pegem@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Baskı:Ankara Özgür Matbaacılık
1250. Cad. No: 25 Ostim Yenimahalle/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 46821

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "İlköğretim Matematik Öğretmenliği 1. Kitap" adlı yayınıımız Analiz bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT İlköğretim Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB-AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı pegem@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi



Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



- 1 Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
- 2 Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
- 3 Konu sonu testlerini çözebilir.

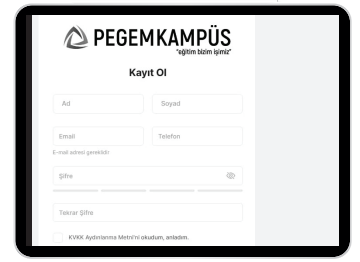


Yapay zekânın öğrenme analizinizi yapabilmesi için interaktif içeriklere etkileşim bırakmanız gerekmektedir. Etkileşim bırakmak için testlerde yer alan cevap seçeneklerini sistem üzerinde işaretlemeniz gerekmektedir. Böylelikle yapay zekâ bırakılan etkileşimler sonrasında sizlerin başarı durumlarını tespit ederek eksik tespitinizi gerçekleştirecektir.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:

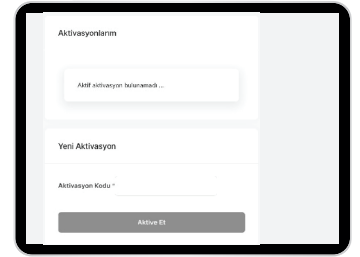
1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.



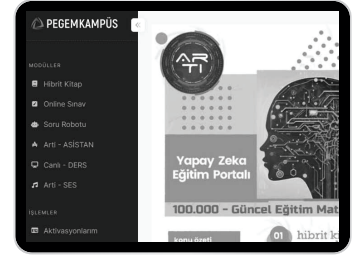
2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "**Aktivasyonlarım**" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



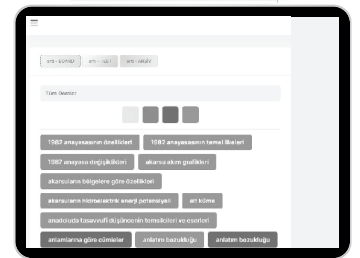
3. Adım Ürünlerim

Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "**Hibrit Kitap**" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



4. Adım Yapay Zekâ Asistan

Hibrit kitaptaki işaretlemeleriniz doğrultusunda eksik tespitinizi yapabilmek için menüdeki "**Arti-Asistan**" sekmesine tıklayabilirsiniz. Eksiklerinizi tamamlamak ve daha fazla içerik görmek için pegemkampus.com adresini ziyaret edebilirsiniz.



Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2025 tarihine kadar geçerlidir.



Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM – POLİNOMLAR

POLİNOMLAR	1
İki Polinom Eşitliği	1
Sabit Terim	1
Katsayılar Toplamı	2
Polinom Derecesiyle İlgili Özellikler	2
Polinomlarda Kalan Bulma	2

2. BÖLÜM – İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER

İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER	14
Kökler Ve Katsayılar Arasındaki Bağlantılar.....	14
Kökleri Bilinen İkinci Derece Denklem Yazılması	14
Karmaşık Sayılar	15
İ Sayısının Kuvvetleri	15
Karmaşık Sayıların Eşitliği	15
Karmaşık Sayıların Eşleniği	15
İkinci Dereceden Denklem Karmaşık Kökleri	15
İkinci Dereceye Dönüştürülebilir Denklem Ve Denklem Sistemleri	16

3. BÖLÜM – PARABOL

PARABOL	27
İki Parabolün Birbirine Göre Durumları	28
Bir Doğru İle Bir Parabolün Durumları	28

4. BÖLÜM – EŞİTSİZLİKLER

EŞİTSİZLİKLER	48
İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem Köklerinin Varlığı Ve İşareti	48

5. BÖLÜM – TRİGONOMETRİ

TRİGONOMETRİ	53
Açı Ölçü Birimleri	53
Trigonometrik Fonksiyonlar	53
Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri	53
Trigonometrik Özdeşlikler.....	54
Geniş Açıların Trigonometrik Oranları	54
Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları	55
Kosinüs Teoremi	55
Sinüs Teoremi	55
Üçgenin Alanı	55
Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	56
Periyodik Fonksiyonlar	56
Toplam Ve Fark Formülleri	57
İki Kat Açı Formülleri	57
Trigonometrik Denklemler	57

6. BÖLÜM – LOGARİTMA

Üstel Fonksiyon	83
Logaritma Fonksiyonu	83
Logaritma Fonksiyonunun Grafiği	83
Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri	84
Logaritmali Denklem Ve Eşitsizlikleri	85

7. BÖLÜM FONKSİYONLAR

FONKSİYONLAR	101
FONKSİYON ÇEŞİTLERİ	102
Birebir fonksiyon	102
Örten fonksiyon	103
İçine fonksiyon	104
Sabit fonksiyon	104
Tek ve Çift fonksiyon	104
Birim fonksiyon	105
Ters fonksiyon	105
Bileşke fonksiyon	105
Bileşke fonksiyonun Özellikleri	105
ALIŞILMIŞ FONKSİYON TÜRLERİ	106
Kuvvet fonksiyonları	106
Polinom fonksiyonlar	106
Rasyonel fonksiyonlar	106
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR	
PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR	107
MUTLAK DEĞER FONKSİYONU	107
MUTLAK DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER VE DENKLEMLER	109
SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONU	111
İŞARET FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ	112
TAM DEĞER VE TAM DEĞER FONKSİYONU	113
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ	113
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN GRAFİKLERİ	116
FONKSİYONLARIN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ	117
FONKSİYON GRAFİKLERİNDE ÖTELEMELER	118

8. BÖLÜM LİMİT

LİMİT	124
SAĞ – SOL LİMİT	124
GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ	126
LİMİT İLE İLGİLİ TEOREMLER	127
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ	128
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN LİMİTİ	129
SİGNUM FONKSİYONUNUN LİMİTİ	130
TAM DEĞER FONKSİYONLARININ LİMİTİ	131
BELİRSİZ DURUMLAR 0/0 BELİRSİZLİĞİ	133
TRİGONOMETRİK 0/0 BELİRSİZLİĞİ	134
∞/∞ BELİRSİZLİĞİ	135
$\infty-\infty$ BELİRSİZLİĞİ	137
$0 \cdot \infty$ BELİRSİZLİĞİ	138
ÜSLÜ, ÜSTEL BELİRSİZLİKLERİN ∞/∞ FORMU	139
SÜREKLİLİK	140
SÜREKLİLİK TEOREMLERİ	140
SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ	141
Kaldırılabilir Süreksizlik	141
Sıçrama Süreksizliği	141
Sonsuz Süreksizliği	141
Balzano Teoremi	141
DÜZGÜN SÜREKLİLİK	143

9. BÖLÜM TÜREV

TÜREV	150
SAĞ-SOL TÜREV.....	151
LİMİT – SÜREKLİLİK – TÜREV İLİŞKİSİ	151
TÜREV ALMA KURALLARI.....	152
YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER.....	166
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ	168
Parçalı Fonksiyonların Türevi.....	168
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ	169
SİGNUM FONKSİYONUNUN TÜREVİ	170
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ.....	170
TÜREVİN UYGULAMALARI.....	180
L'Hospital Kuralı	180
ÜSTEL BELİRSİZLİKLER.....	183
1^∞ , 0^0 , ∞^0 Belirsizlikleri.....	183
TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU	185
POLİNOM – TÜREV İLİŞKİSİ.....	186
DİFERANSİYEL UYGULAMALARI	186
MAKSİMUM – MİNİMUM PROBLEMLERİ	187
Maksimum – Minimum Problemlerinde Kullanılabilecek Kısayollar	190
TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU	194
Teğet – Eğim – Türev İlişkisi.....	194
ARTAN – AZALAN FONKSİYONLAR	199
YEREL EKSTREMUM DEĞERLER.....	202
Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum Noktası	203
TÜREV – EKSTREMUM İLİŞKİSİ	203
Grafikte Maksimum ve Minimum Nokta Yorumu	205
TÜREYLENEBİLİR BİR FONKSİYONUN EĞRİLİK YÖNÜ	206
ASİMPOTOT KAVRAMI	211
Düşey Asimptot	211
Yatay Asimptot	212
Eğik-Eğri Asimptot.....	213
FONKSİYONUN GRAFİKLERİ.....	215
TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER.....	215

10. BÖLÜM İNTEGRAL

BELİRSİZ İNTEGRAL.....	231
TEMEL İNTEGRAL ALMA KURALLARI.....	232
İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ	237
A) Değişken Değiştirme Yöntemi	237
ÖZEL DÖNÜŞÜMLER.....	240
$\sqrt{a^2 - x^2}$ İfadesini İçeren İntegraller	240
$\sqrt{x^2 - a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller	241
$x^2 + a^2$ ve $\sqrt{x^2 + a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller	241
RASYONEL (KESİRLİ) İFADELERİN İNTEGRALI.....	242
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALI	246
İndirgeme Bağlıntıları	248
B) Kısmi İntegrasyon Yöntemi.....	248
BELİRLİ İNTEGRAL	254
Riemann İntegrali	254
İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMLERİ	256
Belirli İntegrallerin Özellikleri	256
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALI	261
İNTEGRALDE ALAN	263
İNTEGRALDE HACİM	264
Kabuk Yöntemi.....	269
Eğri Uzunluğu Hesabı	272
Dönel Yüzeyin Alanı	274
Pappus – Guldin Teoremi	275

11. BÖLÜM DİZİLER – SERİLER

DİZİ	278
Sonlu Dizi	278
Sabit Dizi	278
EŞİT DİZİLER	279
ALT DİZİ	279
DİZİLERDE DÖRT İŞLEM	280
DİZİLERDE SINIRLILIK	281
DİZİLERDE MONOTONLUK	281
ARİTMETİK VE GEOMETRİK DİZİLER	282
Aritmetik Dizi	282
Geometrik Dizi	283
DİZİLERDE LİMİT	284
Dizilerde Limit ile İlgili Özellikler	286
Dizilerde En Büyük Alt Sınır (Ebas) – En Küçük Üst Sınır (Eküs) Kavramları	287
SERİLER	288
Geometrik Seri	290
Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testleri	293
Genel Terim Testi	293
İntegral Testi	293
p – Testi	294
Karşılaştırma Testi	294
Karşılaştırma Testinin Limit Formu	294
Cauchy – Kök Testi	295
D’alambert Oran Testi	296
Limit Testi	297
Alterne Seriler	297
Mutlak Yakınsaklık – Yakınsaklık İlişkisi	297
KUVVET SERİLERİ	298
Yakınsaklık Yarıçapı	298
Yakınsaklık Aralığında Türevlenebilme ve İntegrasyon	299
Taylor ve Maclaurin Serileri	300
Önemli Maclaurin Seri Açılımları	301

12. BÖLÜM ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ	315
Seviye Eğrileri	318
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	318
Süreklilik	321
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Türev (Kısmi Türev)	321
Çok Değişkenli Fonksiyonların 2. Türevi	323
Zincir Kuralı	324
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Teğet Düzlem Denklemi	324
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA MAKSİMUM–MİNİMUM	325
Yerel Maksimum	325
Yerel Minimum	325
Kritik Nokta – Eyer Nokta	326
Kritik Nokta İçin 2. Türev Testi	326
Maksimum–Minimum Problemleri	328
Kapalı Fonksiyonun Türevi	328
ÇÖZÜMLÜ TESTLER	330

POLİNOMLAR

$n \in \mathbb{N}$ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve x değişken olmak üzere,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ifadesine **gerçek katsayılı tek değişkenli polinom** denir.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinomunda,

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ katsayılarıdır.
- a_n baş katsayısıdır. (Derecesi en büyük olan terimin katsayısıdır.)
- a_0 sabit terimdir. (x 'i içermeyen ifadedir.)
- $P(x)$ polinomunun derecesi $\text{der}[P(x)]$ ile gösterilir ve bu polinom da $\text{der}[P(x)] = n$ 'dir. (x 'in en büyük doğal sayı kuvvetidir.)
- $a_0 \neq 0$ olmak üzere, $P(x) = a_0$ polinomuna **sabit polinom** denir ve sabit polinomun derecesi sıfırdır.
- $P(x) = 0$ polinomuna **sıfır polinom** denir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

Örnek

$P(x) = 7x^4 + 6x^5 + 3x^2 + 2x - 1$ polinomunda,

Katsayılar $\rightarrow 7, +6, 3, 2, -1$

Derece $\rightarrow \text{der}[P(x)] = 5$

Baş katsayı $\rightarrow 6$

Sabit terim $\rightarrow -1$

Örnek

$$R(x) = x^4 + 2x^{n-2} + x^{\frac{18}{n}} + 1$$

ifadesi bir polinom olduğuna göre, n 'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

$R(x)$ 'in polinom olması için x 'in kuvvetleri doğal sayı olmalıdır.

$$\frac{18}{n} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n = 1, 2, 3, 6, 9, 18 \dots \text{(i)}$$

$$n - 2 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n - 2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 2 \dots \text{(ii)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) ve (ii) den} \\ n = 2, 3, 6, 9, 18 \text{ olur.} \\ \text{Toplamları} \\ = 2 + 3 + 6 + 9 + 18 \\ = 38 \text{ bulunur.} \end{array} \right\}$$

Örnek

$P(x) = (a - 5)x^2 + (a + 2b + 1)x + 4$ polinomu sabit polinom ve $R(x) = (m + 4)x + n - 6$ polinomu sıfır polinom olduğuna göre, $a + b + m + n$ toplamı kaçtır?

$$\begin{array}{l} P(x) \text{ sabit polinom ise} \left\{ \begin{array}{l} a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5 \text{ 'tir.} \\ a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 5 + 2b + 1 = 0 \\ \Rightarrow 2b = -6 \\ \Rightarrow b = -3 \text{ 'tür.} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R(x) \text{ sıfır polinom ise} \left\{ \begin{array}{l} m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \text{ 'tür.} \\ n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ 'dir.} \end{array} \right. \end{array}$$

O hâlde, $a + b + m + n = 5 - 3 - 4 + 6 = 4$ bulunur.

Sıfır polinomda bütün katsayılar ve sabit terim sıfıra eşitlenirken sabit polinomda sadece değişkenin katsayıları sıfıra eşitlenir.

NOT

$$\begin{array}{l} R(x) \text{ sıfır polinom ise} \left\{ \begin{array}{l} m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \text{ 'tür.} \\ n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ 'dir.} \end{array} \right. \end{array}$$

O hâlde, $a + b + m + n = 5 - 3 - 4 + 6 = 4$ bulunur.

İki Polinom Eşitliği

$P(x)$ ve $Q(x)$ gibi iki polinomun dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerin katsayıları da birbirine eşit ise $P(x)$ ile $Q(x)$ polinomlarına **eşit polinom** denir ve $P(x) = Q(x)$ şeklinde gösterilir.

Sabit Terim

Bir polinomun sabit terimi bulunurken verilen polinomda değişken yerine 0 (sıfır) yazılır.

$P(x)$ polinomunun sabit terimi: $P(0)$

$P(x + 1)$ polinomunun sabit terimi: $P(1)$

$P(x - 3)$ polinomunun sabit terimi: $P(-3)$

Soruda hangi polinomun "sabit terimi" ve "katsayılar toplamı" sorulduğuna dikkat etmeliyiz.

NOT

Katsayılar Toplamı

Bir polinomun katsayılar toplamı bulunurken verilen polinomda değişken yerine 1 yazılır.

- $P(x)$ polinomunun katsayılar toplamı: $P(1)$
- $P(x + 1)$ polinomunun katsayılar toplamı: $P(2)$
- $P(x - 3)$ polinomunun katsayılar toplamı: $P(-2)$
- $P(x)$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı: $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$, dir.
- $P(x)$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamı: $\frac{P(1) - P(-1)}{2}$, dir.

Örnek

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

olduğuna göre, $A \cdot B$ çarpımını bulalım.

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$3x+1 = Ax + A + Bx - B$$

$$A + B = 3 \text{ ve } A - B = 1 \text{ dir.}$$

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A = 4 \\ A = 2 \text{ ve } B = 1 \text{ dir.} \\ \mathbf{A \cdot B = 2 \text{ bulunur.}} \end{cases}$$

$P(x)$ bir polinom olmak üzere, $P(a) = 0$ eşitliğini sağlayan a değerlerine $P(x)$ polinomunun kökleri (veya sıfırları) denir.

Örnek

$P(x + 1) = x^2 - 6x + m$ polinomu veriliyor.

$P(x - 2)$ polinomunun katsayılar toplamı 18 olduğuna göre, $P(x)$ polinomunun sabit terimini bulalım.

$P(x - 2)$ polinomunun katsayılar toplamı:

$$P(-1) = 18 \text{ dir.}$$

$$x = -2 \text{ için } P(-1) = 4 + 12 + m = 18$$

$$16 + m = 18$$

$$m = 2 \text{ dir.}$$

$P(x)$ polinomunun sabit terimi $P(0) = ?$

$$x = -1 \text{ için } P(0) = 1 + 6 + 2 = 9 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$P(x)$ bir polinom olmak üzere,

$$P(x + 3) + P(2x - 1) = 9x + 12$$

olduğuna göre, $P(5)$ değerini bulalım.

$$P(x) = ax + b \text{ olsun.}$$

$$P(x + 3) = ax + 3a + b \text{ ve } P(2x - 1) = 2ax - a + b \text{ olur.}$$

$$ax + 3a + b + 2ax - a + b = 9x + 12$$

$$\Rightarrow 3ax + 2a + 2b = 9x + 12 \text{ (iki polinomunun eşitliğinden)}$$

$$\Rightarrow 3a = 9 \text{ ve } 2a + 2b = 12$$

$$\Rightarrow \mathbf{a = 3} \quad 2b = 6 \Rightarrow \mathbf{b = 3}$$

$$\Rightarrow P(x) = 3x + 3 \Rightarrow P(5) = 15 + 3 = 18 \text{ bulunur.}$$

Soruda iki polinomun toplamı 1. dereceden bir polinoma eşit ise $P(x) = ax + b$ şeklinde seçilmelidir.

Polinomun Derecesi ile İlgili Özellikler

$\text{der}[P(x)] = a$, $\text{der}[Q(x)] = b$ ve $a > b$ olmak üzere,

✓ $\text{der}[P(x) \mp Q(x)] = a$	✓ $\text{der}[P^n(x)] = n \cdot a$
✓ $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = a + b$	✓ $\text{der}[P(x^n)] = n \cdot a$
✓ $\text{der}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = a - b$	✓ $\text{der}[P(Q(x))] = a \cdot b$

Polinomlarda Kalan Bulma

✓ $P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölümünden kalanı bulmak için x yerine a yazılır.

→ $P(x)$ polinomunun $(x - 3)$ ile bölümünden kalan $P(3)$ değeridir.

→ $P(x - 1)$ polinomunun $(x + 2)$ ile bölümünden kalan $P(-3)$ değeridir.

✓ $P(x)$ polinomunun $x^n - a$ ile bölümünden kalanı bulmak için x^n yerine a yazılır.

✓ $P(x)$ polinomunun $x^2 + ax + b$ ile bölümünden kalanı bulmak için x^2 yerine $-ax - b$ yazılır.

2025

HİBRİT
KİTAP

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

MEB-AGS ÖABT

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

SOYUT CEBİR - LINEER CEBİR

KONU ANLATIMLI



e-Kitaba ve video derslere
erişebilmek için
QR kodu okutunuz.



Fiziksel Kitap

HİBRİT
KİTAP

e-Kitap

Video Ders Hediye

ARTIFORCE, TÜBİTAK-TEYDEB Destek Programından yararlanılarak geliştirilmiştir (Proje No: 7230451).
Ürün/hizmet ile ilgili tüm sorumluluk Pegem Akademi Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Hizmetleri Tic. AŞ'ye aittir.



PEGEM AKADEMİ



Komisyon

MEB-AGS ÖABT İlköğretim Matematik Öğretmenliği Soyut Cebir - Lineer Cebir Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6128-17-0

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

I. Baskı: 2024, Ankara

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: pegem@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Baskı:Ankara Özgür Matbaacılık
1250. Cad. No: 25 Ostim Yenimahalle/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 46821

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "İlköğretim Matematik Öğretmenliği Soyut Cebir - Lineer Cebir 2. Kitap" adlı yayınıımız Soyut Cebir - Lineer Cebir bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS / ÖABT İlköğretim Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB-AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı pegem@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi



Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



- 1 Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
- 2 Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
- 3 Konu sonu testlerini çözebilir.

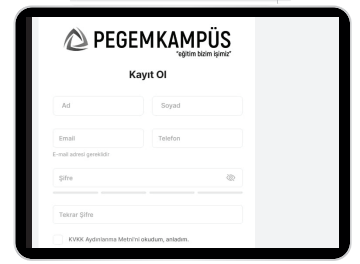


Yapay zekânın öğrenme analizinizi yapabilmesi için interaktif içeriklere etkileşim bırakmanız gerekmektedir. Etkileşim bırakmak için testlerde yer alan cevap seçeneklerini sistem üzerinde işaretlemeniz gerekmektedir. Böylelikle yapay zekâ bırakılan etkileşimler sonrasında sizlerin başarı durumlarını tespit ederek eksik tespitinizi gerçekleştirecektir.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:

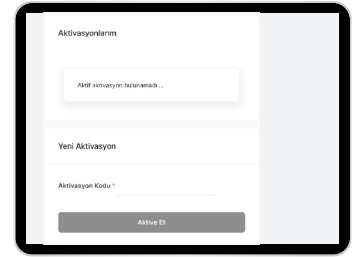
1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.



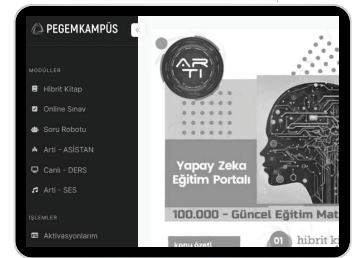
2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "**Aktivasyonlarım**" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



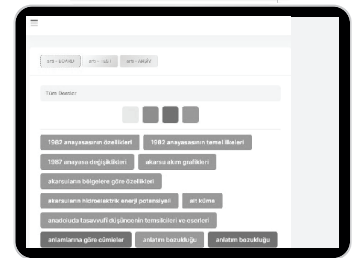
3. Adım Ürünlerim

Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "**Hibrit Kitap**" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



4. Adım Yapay Zekâ Asistan

Hibrit kitaptaki işaretlemeleriniz doğrultusunda eksik tespitinizi yapabilmek için menüdeki "**Arti-Asistan**" sekmesine tıklayabilirsiniz. Eksiklerinizi tamamlamak ve daha fazla içerik görmek için pegemkampus.com adresini ziyaret edebilirsiniz.



Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2025 tarihine kadar geçerlidir.



Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

SOYUT CEBİR

Sayılar ve Özellikleri.....1	Simetrik (Permütasyon) ve Alterne Gruplar.....25
Rakam.....1	Gruplarda Homomorfizm ve İzomorfizm.....26
Sayma Sayıları.....1	Homomorfizma.....26
Doğal Sayılar.....1	İzomorfizma.....26
Tam Sayılar.....1	Bölüm Grupları.....29
Aralarında Asallık.....1	Devirli Gruplar.....30
Rasyonel Sayılar.....1	Devirli Grupların Alt Grupları.....31
İrrasyonel Sayılar.....1	Üreteç Sayısı.....32
Reel Sayılar.....1	Çarpım Grupları.....32
Tek ve Çift Sayılar.....1	İzomorf olmayan Abelyan Gruplar.....33
Ardışık Sayılar.....2	Halka, Cisim ve Tamlık Bölgesi.....33
Negatif ve Pozitif Sayılar ile İlgili Özellikler.....2	Alt Halka.....35
Tam Sayılarda Bölünebilme.....2	Sıfır Bölenler ve Tamlık Bölgesi.....35
En Büyük Ortak Bölen.....4	Bölüm Halkası.....36
En Küçük Ortak Kat.....4	İdeal.....36
Euler ϕ -Fonksiyonu.....7	Nilpotent Eleman.....36
ϕ -Fonksiyonunun Bazı Özellikleri.....7	Polinom Halkası.....36
Kongrüanslar.....9	Cisim.....37
Tam Sayılar ve Modüler Aritmetik.....9	Cebirsel Sayı.....37
Gruplar.....19	Transandant Sayı.....37
Tek İşlemlili Cebirsel Yapı Türleri.....19	Sayılabilir Küme.....37
Mertebe.....21	Çözümlü Test 1.....43
Alt Gruplar.....22	Çözümlü Test 2.....47
Normal Alt Gruplar.....24	Çözümlü Test 3.....51
	Çözümlü Test 4.....55

LİNEER CEBİR

Hatırlatma: İç İşlem.....	59	Alterne ve Çok Lineer Fonksiyonlar.....	115
Dış İşlem.....	59	n-Linear Fonksiyonlar.....	115
Grup.....	59	Bir Lineer Dönüşümün Determinantı ve İzi.....	116
Alt Grup	59	Determinantlarda Alan ve Hacim Hesabı	116
Halka	59	Matrislerin Polinomu	117
Vektör Uzayları	60	Karakteristik Değerler ve Karakteristik	
Alt Vektör Uzayı	62	Vektörler	118
Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık	66	Karakteristik Uzay	119
Taban (Baz).....	67	Karakteristik Polinom ve Karakteristik	
İç Çarpım Uzayları.....	68	Denklemler	120
İç Çarpım.....	68	Çözümlü Test 1.....	127
Norm	70	Çözümlü Test 2.....	132
Ortonormal Baz	75	Çözümlü Test 3.....	136
Direkt Toplam Uzayı	80	Çözümlü Test 4.....	140
İç Çarpım Uzaylarının Alt Uzayları.....	81	Çözümlü Test 5.....	144
Lineer Dönüşümler	83		
Matrisler ve Matris Uzayları	90		
Matris Toplamı	91		
Skaler ile Matris Çarpımı.....	92		
Matris Çarpımı.....	92		
Bir Matrisin Transpozu	93		
Kare Matrisler.....	94		
Bir Matrisin Tersi.....	94		
Elementer Operasyonlar (Basit İşlemler).....	104		
Determinantlar	105		
Sarrus Kuralı	106		
Minör ve Kofaktör	108		

SOYUT CEBİR

1. Sayılar ve Özellikleri

Rakam

Sayıları yazmaya yarayan sembollere rakam denir. Kullandığımız onluk sistemdeki rakamların kümesi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dur.

Rakamlarla oluşturulan ifadelere sayı denir.

Sayma Sayıları

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesi sayma sayılar kümesidir.

Doğal Sayılar

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesidir. $N^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ pozitif doğal sayılar kümesini ifade eder.

Tam Sayılar

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesidir.

Tam sayılar kümesi üç ana bölümden oluşur. Negatif tam sayılar (Z^-), pozitif tam sayılar (Z^+) ve $\{0\}$ kümesidir. Ayrıca $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$ dir.

Aralarında Asallık

p ve q sıfırdan farklı iki pozitif tam sayı olsun. p ve q sayılarını ortak olarak bölen en büyük pozitif tam sayı 1 ise p ve q aralarında asaldır denir.

Rasyonel Sayılar

$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \text{ ve } q \text{ aralarında asal, } q \neq 0 \right\}$ kümesidir.

İrrasyonel Sayılar

$I = Q'$ sembolleriyle gösterilir yukarıda tanımlanan $\frac{p}{q}$ tipinde yazılamayan sayılardan oluşur. Yani rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayı denir.

Reel Sayılar

Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşim kümesidir. R ile gösterilir. $R = Q \cup Q'$ dir.

Örnek

$x, y, z \in Z$ olmak üzere,

$$x \cdot y = 12, y \cdot z = 4 \text{ ve } x \cdot z = 3$$

eşitliklerini sağlayan x, y, z sayılarının en büyük toplamı en küçük toplamından kaç fazladır?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm

$$\frac{x \cdot y}{y \cdot z} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{x}{z} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot z \text{ bulunur.}$$

Bu ifade $x \cdot z = 3$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$3z^2 = 3 \Rightarrow z = \mp 1 \text{ bulunur.}$$

$$z = 1 \text{ için } x = 3 \text{ ve } y = 4 \text{ olup } x + y + z = 8$$

$$z = -1 \text{ için } x = -3 \text{ ve } y = -4 \text{ olup } x + y + z = -8 \text{ bulunur.}$$

$8 - (-8) = 16$ dir. Doğru seçenek C olarak elde edilir.

Örnek

$a, b, c \in N$ olmak üzere

$3a + 6b - c = 24$ eşitliğini sağlayan a, b ve c değerleri için $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm

Katsayısı büyük olana büyük değer verilir.

Sayılar aynı olabileceğinden $a = 0 = c$ seçilirse $b = 4$ bulunur.

$$a + b + c = 4 \text{ olur.}$$

Örnek

a ve b doğal sayılardır.

$$56 \cdot a = b^3$$

eşitliğini sağlayan en küçük b değeri kaçtır?

Çözüm

Önce sayı asal çarpanlarına ayrılır.

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

$$56 \cdot a = 2^3 \cdot 7 \cdot a = b^3 \text{ tür.}$$

Buradan $a = 7^2$ seçilirse $b = 2 \cdot 7 = 14$ bulunur.

Tek ve Çift Sayılar

2 ile kalansız bölünebilen tam sayılara çift tam sayı, 2 ile tam bölünemeyen tam sayılara tek tam sayı denir. Çift sayılar $2n$, tek tam sayılar $2n - 1$ ile gösterilir ($n \in Z$).

Tek ve Çift Tam Sayılar İle İlgili Özellikler

- 1) $T \mp T = \text{Ç}$ 5) $\text{Ç} \cdot \text{Ç} = \text{Ç}$
 2) $\text{Ç} \mp \text{Ç} = \text{Ç}$ 6) $T \cdot T = T$
 3) $T \mp \text{Ç} = T$ 7) $n \in N$ olmak üzere $T^n = T$
 4) $T \cdot \text{Ç} = \text{Ç}$ 8) $n \in N^+$ olmak üzere $\text{Ç}^n = \text{Ç}$ dir.

Tek ve çift sayılarda bölme işlemine ait kural tanımlanamaz. Örneğin $60, 40$ ve 2 sayıları çift sayıdır.

$\frac{40}{2} = \text{Ç}$, $\frac{40}{40} = T$, $\frac{40}{60}$ sayısı ne tek ne de çifttir.

NOT!

Ardışık Sayılar

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n, n + 1, n + 2, \dots$ sayılarına ardışık tam sayılar denir.

Kural:

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \text{ dir.}$$

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2n - 1, 2n + 1, 2n + 3, \dots$ sayılarına ardışık tek sayılar denir.

Kural:

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 \text{ dir.}$$

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2n, 2n + 2, 2n + 4, \dots$ sayılarına ardışık çift sayılar denir.

Kural:

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1) \text{ dir.}$$

Kural:

Ardışık terimleri arasındaki artış miktarı eşit olan dizide

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$$

ve

$$\text{Terim Toplamı} = \frac{\text{Terim Sayısı} \cdot (\text{Son terim} + \text{İlk terim})}{2}$$

dir.

Negatif ve Pozitif Sayılar İle İlgili Özellikler

- 1) $(-)\cdot(-) = (+)$ 5) $(-)/(-) = (+)$
- 2) $(-)\cdot(+)=(-)$ 6) $(-)/(+) = (-)$
- 3) $(+)\cdot(+)=(+)$ 7) $(+)/(+) = (+)$
- 4) $(+)\cdot(-)=(-)$ 8) $(+)/(-) = (-)$

9) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(-)^{2n} = (+)$ dir.

10) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(-)^{2n-1} = (-)$ dir.

11) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(+)^n = (+)$ dir.

Tam Sayılarda Bölünebilme

$m, n, r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m \cdot n = r$ olsun. Bu durumda m ve n ye r nin bölenleri (çarpanları) r ye de m ve n nin bir katı denir. m, r nin bir böleni ise bu durum $m \mid_r$ ile, aksi takdirde

$m \nmid_r$ ile gösterilir.

2 ile bölünebilme: Çift tam sayılar 2 ile tam bölünür.

3 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları toplamı 3 veya 3 ün katı ise sayı 3 ile tam bölünür.

4 ile bölünebilme: Verilen sayının son iki basamağı (birler ve onlar basamağı) 4 ile tam bölünebiliyor ise verilen sayı 4 ile tam bölünür.

5 ile bölünebilme: Verilen sayının birler basamağı 0 veya 5 ise sayı 5 ile tam bölünür.

7 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları altına sağdan sola doğru sırasıyla 1, 2, 3 sayıları yazılır. Bu rakamlar altlarına yazdığımız sayılar ile çarpılır. Daha sonra sağdan sola üçerli gruplar hâlinde alınıp bu gruplar (+), (-) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 7 veya 7'nin katı ise verilen sayı 7 ile tam bölünür.

8 ile bölünebilme: Verilen sayının son üç basamağı (birler, onlar ve yüzler basamağı) 8 ile bölünebiliyor ise sayı 8'e tam bölünür.

9 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları toplamı 9 veya 9 un katı ise sayı 9 ile tam bölünür.

10 ile bölünebilme: Verilen sayının birler basamağı 0 ise verilen sayı 10 ile tam bölünür.

11 ile bölünebilme: Verilen sayı sağdan sola doğru sırası ile (+), (-) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 11 veya 11 in katı ise verilen sayı 11 ile tam bölünür.

Örnek

Hangi n doğal sayıları için $(n+1) \mid_{(n^2+1)}$ dir.

Çözüm

$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(n+1) \mid_{(n^2-1)} \text{ dir.}$$

$$(n+1) \mid_{(n^2+1)} \text{ ve } (n+1) \mid_{(n^2-1)} \text{ olduğundan}$$

$$n+1 \mid_{[(n^2+1)-(n^2-1)]} \Rightarrow n+1 \mid_2 \text{ olur.}$$

$n \in \mathbb{N}$ olduğundan ve $n + 1 \leq 2$ olması gerektiğinden $n = 0, 1$ elde edilir.

Kural:

$[1, x]$ aralığında n ile bölünebilen doğal sayıların sayısı

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \text{ dir.}$$

Kural:

$a \in \mathbb{Z}$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$n < m \text{ için } a^{2^n+1} \mid_{a^{2^m-1}} \text{ dir.}$$

Kural:

$n \geq 2$ olmak üzere n ve k iki doğal sayı olsun.

$$n-1 \mid_{n^k-1} \text{ dir.}$$

Kural:

n bir doğal sayı ve k bir tek sayı olsun.

$$(1 + 2 + \dots + n) \mid (1^k + 2^k + \dots + n^k) \text{ dir.}$$

Kural:

$a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. a sayısı b ile bölündüğünde kalan r ise $2^a - 1$ sayısı $2^b - 1$ ile bölündüğünde kalan $2^r - 1$ dir.

Örnek

$\{1, 2, \dots, 600\}$ dizisinde 13 ile bölünebilen kaç tane doğal sayı vardır?

Çözüm

$$\left\lfloor \frac{600}{13} \right\rfloor = 46 \text{ adettir.}$$

Örnek

1000 den küçük kaç doğal sayı 17 ile bölünür?

Çözüm

$[1, 1000]$ kümesinde

$$\left\lfloor \frac{1000}{17} \right\rfloor = 58 \text{ ve } 0 \in \mathbb{N} \text{ için } 17 \mid_0 \text{ olup toplam } 58 + 1 = 59$$

adet sayı 17 ile tam bölünür.

Örnek

$N = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$ sayısının 41 ile bölünebilmesi için n en az kaç olmalıdır?

Çözüm

$$\begin{aligned} N &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) \\ &= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) \\ &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

sayısının 41 ile bölünebilmesi için $n(n+1)(n+2)$ çarpanlarından en az biri 41 e bölünmelidir.

$$n + 2 = 41 \Rightarrow n = 39 \text{ olmalıdır.}$$

Teorem:

m, n ve r tam sayı olmak üzere,

- $\forall m \in \mathbb{Z}$ iken $a \mid_0$ dir.
- $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $\pm 1 \mid_m$ ve $\pm m \mid_m$ dir.
- $m \mid_{\pm 1} \Leftrightarrow m = \mp 1$ dir.
- $m \mid_n$ ise $\pm m \mid_{\pm n}$ dir.
- $m \mid_n$ ve $n \mid_r$ ise $m \mid_r$ dir.
- $m \mid_n$ ve $n \mid_m$ ise $m = \pm n$ dir.
- $c \neq 0$ olmak üzere $cm \mid_{cn}$ ise $m \mid_n$ dir.
- $m_1 \mid_{n_1}$ ve $m_2 \mid_{n_2}$ ise $m_1 \cdot m_2 \mid_{n_1 \cdot n_2}$ dir.
- $m \mid_n$ ve $m \mid_r$ ise $m \mid_{n+r}$ dir.

Çıkış Sorular

$k \mid_m$ gösterimi k sayısının m sayısını tam bölündüğünü ifade eder.

Buna göre a, b ve c tam sayıları için,

- $c \mid a \cdot b$ ise $c \mid a$ ve $c \mid b$ dir.
- $a \cdot b \mid_c$ ise $a \mid_c$ ve $b \mid_c$ dir.
- $a \mid_b$ ve $b \mid_c$ ise $a \mid_c$ dir.

yargılarından hangileri **daima** doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) Yalnız III

Çözüm

c sayısı $a \cdot b$ yi bölüyor ise $c \mid_a$ ve $c \mid_b$ doğru olmayabilir, $6 \mid_{2 \cdot 3}$ tür ama $6 \mid_2$ ve $6 \mid_3$ yanlıştır. II ve III. öncül doğrudur.

Cevap D

Tanım:

(Asal Sayı) : $n > 1$ tam sayısının kendisinden ve birden başka pozitif böleni yoksa n 'ye asal (= prime) sayı denir.

Tanım:

(Bileşik Sayı): Asal olmayan sayılara bileşik (= combined) sayı denir.

Tanım:

Aralarındaki fark iki olan asal sayılara ikiz asallar denir.

Teorem:

Her bileşik sayının en az bir asal çarpanı vardır.

Teorem (Euclid):

Asal sayıların sayısı sonsuzdur.

Bir sayının tüm bölenlerinin sayısı pozitif bölenlerinin sayısının iki katıdır.

Uyarı!

Teorem (Bölme Algoritması):

$m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \neq 0$ ise $m = q \cdot n + r$; $0 < r < |n|$ olacak şekilde bir tek q ve r tam sayı ikilisi vardır.

En Büyük Ortak Bölen:

m ve n tam sayılar olmak üzere $k|m$ ve $k|n$ ise k ye m ve n nin bir ortak böleni denir.

m ve n yi bölen en büyük pozitif d tam sayısına m ve n nin en büyük ortak böleni (=obeb = ebob) denir.

$d = (m, n)$ ile gösterilir.

Uyarı

1) Tanıma göre d 'nin m ve n 'nin obeb'i olması için gerek ve yeter şart

i) $d|m$ ve $d|n$ olması,

ii) $k, k|m$ ve $k|n$ özelliğindeki bir başka ortak bölen iken $k|d$ olmasıdır.

2) İki'den fazla sayının obeb'i de benzer şekilde tanımlanır.

Uyarı

Obeb verilen tam sayıların pozitif lineer toplamlarının en küçüğüdür.

Teorem:

Sıfırdan farklı iki tam sayının obeb'i tektir.

Teorem: $(m, n) = d \Leftrightarrow \left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ 'dir.

Teorem:

$(a, b) = 1$ ve $(a, c) = 1$ ise $(a, b, c) = 1$ 'dir.

Teorem:

$\frac{a}{b} \cdot c$ ve $(a, b) = 1$ ise $\frac{a}{c}$ dir.

En Küçük Ortak Kat:

a, b sıfırdan farklı tam sayılar olsun.

a) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a|k$ ve $b|k$ ise k 'ye a ve b 'nin bir ortak katı denir.

b) k, a ve b 'nin bir ortak katı olsun. Eğer $t; a$ ile b 'nin bir başka ortak katı iken $k|t$ ise k 'ye a ile b 'nin en küçük ortak katı (ekok) denir ve $[a, b] = k$ ile gösterilir.

Teorem:

$a, b \neq 0$ iki tam sayı ise $(a, b) \cdot [a, b] = |a \cdot b|$ dir.

Örnek

$x \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p = x^2 - 1$ olacak şekildeki tüm p asal sayılarını bulunuz.

Çözüm

$P = (x - 1)(x + 1)$ sayısının çarpanları

$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot p \\ p \cdot 1 \end{array} \right\} P$ asal olduğundan çarpanı 1 ve kendisidir.

$(-1) \cdot (-p)$

$(-p) \cdot (-1)$ tipindedir.

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, p = 3$ asaldır.

$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0, p = -1$ asal değil.

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, p = -1$ asal değil

$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2, x = -2 \notin \mathbb{N}$

Çözüm kümesi $p = \{3\}$ tür.

Örnek

$x \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p = x^3 - 1$ şeklindeki tüm p asallarını bulunuz.

Çözüm

$P = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ sayısının çarpanları

$p \cdot 1$

$1 \cdot p$

$(-1) \cdot (-p)$

$(-p) \cdot (-1)$ tipindedir.

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, p = 2^2 + 2 + 1 = 7$ asaldır.

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, p = -1$ asal değildir.

$x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = -1$

$p = -1$ asal değil $p = -2$ asal değil

$x^2 + x + 1 = -1 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2} \notin \mathbb{N}$

Çözüm kümesi $x = \{7\}$ dir.

Örnek

$(a, 4) = 2$ ve $(b, 4) = 2$ iken $(a + b, 4)$ nedir?

2025

HİBRİT
KİTAP

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

MEB-AGS ÖABT

İLKÖĞRETİM MATEMATİK
ÖĞRETMENLİĞİ
GEOMETRİ - İSTATİSTİK VE OLASILIK
KONU ANLATIMLI



e-Kitaba ve video derslere
erişebilmek için
QR kodu okutunuz.



Fiziksel Kitap

HİBRİT
KİTAP

e-Kitap

Video Ders Hediye

ARTIFORCE, TÜBİTAK-TEYDEB Destek Programından yararlanılarak geliştirilmiştir (Proje No: 7230451).
Ürün/hizmet ile ilgili tüm sorumluluk Pegem Akademi Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Hizmetleri Tic. AŞ'ye aittir.

PEGEM AKADEMİ



Komisyon
MEB-AGS ÖABT İlköğretim Matematik Öğretmenliği Geometri - İstatistik ve Olasılık
Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6128-17-0

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

I. Baskı: 2024, Ankara

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: pegem@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Baskı:Ankara Özgür Matbaacılık
1250. Cad. No: 25 Ostim Yenimahalle/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 46821

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "İlköğretim Matematik Öğretmenliği Geometri-İstatistik ve Olasılık 3. Kitap" adlı yayınıımız Geometri - İstatistik ve Olasılık bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS / ÖABT İlköğretim Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB-AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı pegem@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi



Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



- 1 Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
- 2 Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
- 3 Konu sonu testlerini çözebilir.

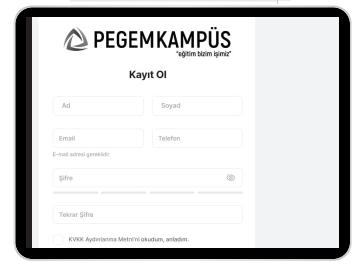


Yapay zekânın öğrenme analizinizi yapabilmesi için interaktif içeriklere etkileşim bırakmanız gerekmektedir. Etkileşim bırakmak için testlerde yer alan cevap seçeneklerini sistem üzerinde işaretlemeniz gerekmektedir. Böylelikle yapay zekâ bırakılan etkileşimler sonrasında sizlerin başarı durumlarını tespit ederek eksik tespitinizi gerçekleştirecektir.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:

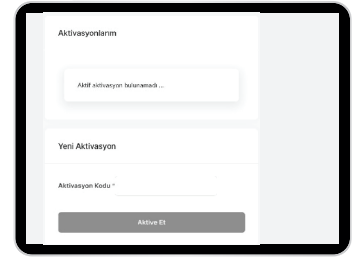
1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.



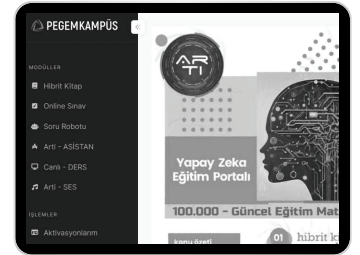
2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "**Aktivasyonlarım**" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



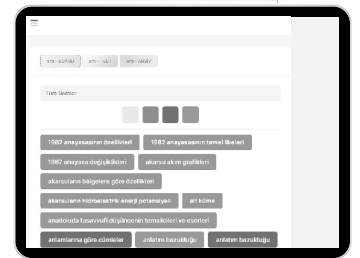
3. Adım Ürünlerim

Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "**Hibrit Kitap**" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



4. Adım Yapay Zekâ Asistan

Hibrit kitaptaki işaretlemeleriniz doğrultusunda eksik tespitinizi yapabilmek için menüdeki "**Arti-Asistan**" sekmesine tıklayabilirsiniz. Eksiklerinizi tamamlamak ve daha fazla içerik görmek için pegemkampus.com adresini ziyaret edebilirsiniz.



Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2025 tarihine kadar geçerlidir.



Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

UZAYDA VEKTÖRLER

UZAYDA VEKTÖRLER.....	1
İki Vektörün Paralellığı.....	2
Vektörlerin Lineer Bileşimi.....	2
Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık.....	2
Standart Birim Vektörleri.....	2
Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı.....	2
İki Vektör Arasındaki Açık.....	3
Dik İzdüşüm Vektörü.....	3
Vektörel (Çapraz) Çarpım.....	4
Paralelkenarın Alanı.....	5
Paralelyüzün Hacmi.....	6
Çözümlü Test.....	9
Çözümler.....	11

UZAYDA DOĞRU ve DÜZLEM DENKLEMİ

UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEM DENKLEMİ.....	13
İki Noktası Belli Olan Doğru Denklemi.....	13
Düzlem.....	14
Çözümlü Sorular - I.....	16
Bir Noktanın Düzleme Uzaklığı.....	19
Çözümlü Sorular - II.....	19
Uzayda İki Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları ve Kesişme Noktasının Bulunması.....	22
Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı.....	23
Aykırı İki Doğru Arasındaki En Kısa Uzaklık ve Ortak Dikme ve Dikme Ayaklarının Bulunması.....	24
Çözümlü Sorular.....	24
İki Düzlemin Birbirlerine Göre Konumu ve İki Düzlem Arasındaki Açık.....	28
Bir Düzlem ile Bir Doğru Arasındaki Açık.....	28
İki Düzlemin Açığı Düzlemi.....	28
Çözümlü Sorular.....	28
Bir Doğrudan Geçen Düzlem Demeti.....	30
Uzayda Simetri.....	31
Çözümlü Sorular.....	32
Çözümlü Test - 1.....	37
Çözümler.....	39

Çözümlü Test - 2.....	41
Çözümler.....	43

YÜZEYLER

E^3 DE YÜZEY.....	46
KÜRE.....	46
Küre Olma Koşulları.....	47
Kürenin Parametrik Denklemi.....	48
Kürenin Teğet Düzlemi.....	48
SİLİNDİR.....	48
KONİ.....	50
Bazı Kuadratik Yüzeyleer.....	54
Çözümlü Sorular.....	54
Silindirin İsimlendirilmesi.....	55
Dönel Yüzeyleer.....	57
SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR.....	59
KÜRESEL KOORDİNATLAR.....	59
Çözümlü Test.....	60
Çözümler.....	62

KONİKLER

TANIM.....	64
Genel Konik Denkleminde x, y - li Terimi Yok Etme.....	64

ELİPS - HİPERBOL - PARABOL

ELİPS.....	66
Elipsin Denklemi.....	66
Elipsin Teğet ve Normal Denklemleri.....	67
Elipsin Parametrik Denklemi.....	68
HİPERBOL.....	70
Hiperbolün Denklemi.....	70
PARABOL.....	73
Parabolün Denklemi.....	73
Çözümlü Test.....	82
Çözümler.....	84
Karma Test - 1.....	86
Çözümler.....	88
Karma Test - 2.....	90
Çözümler.....	92

2. BÖLÜM

İSTATİSTİK VE OLASILIK

TEMEL KAVRAMLAR.....	94
Sayısal Bilgi, Veri, Ölçüm	94
Değişken ve Türleri.....	94
Fonksiyon	94
Evren ve Örneklem.....	96
İstatistik ve Parametre.....	96
Çözümlü Test.....	97
Çözümler	99

VERİNİN DÜZENLENMESİ VE MERKEZE EĞİLME ÖLÇÜLERİ

VERİNİN DÜZENLENMESİ.....	100
Grafik Çizme.....	100
Merkeze Eğilme (Yığılma) Ölçüleri.....	101
Mod (Tepe Değer).....	101
Medyan (Ortanca).....	101
Aritmetik Ortalama.....	102
Mod, Medyan ve Ortalamanın Karşılaştırılması	103
Ağırlıklı Ortalama.....	104
DEĞİŞME (DAĞILMA) ÖLÇÜLERİ	105
Ranj (Açıklık)	105
Mutlak Kayma.....	105
Varyans ve Standart Kayma	105
Bağıl Değişkenlik Katsayısı	107
STANDARTLAŞTIRMA (z ve T PUANLARI).....	107
z Puanı	107
T Puanı	107
Çözümlü Test.....	109
Çözümler	112

OLASILIK

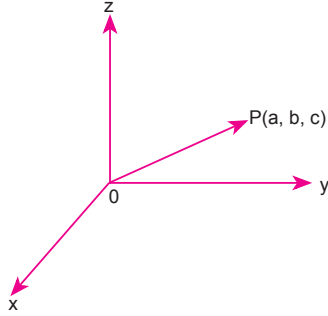
TEMEL KAVRAMLAR.....	114
Olasılık.....	115
Birleşik Olayların Olasılığı	116
Ayrık İki Olayın Birleşiminin Olasılığı.....	116
Olaylar Arasındaki Bağlılıklar	117
Şartlı Olaylar ve Olasılıklar	117
Bağımsız Olaylar	118
Çözümlü Sorular.....	119
TESADÜFİ DEĞİŞKEN, OLASILIK FONKSİYONU VE BEKLENEN DEĞER.....	121
Tesadüfi Değişkenin Beklenen Değeri.....	127
Varyans Hesabı	130
Momentler.....	133
Moment Çıkaran Fonksiyon.....	133
Birleşik Olasılık Dağılımı.....	135
Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu.....	135
Marjinal Olasılık Fonksiyonları.....	136
Kovaryans ve Korelasyon.....	138
Çözümlü Test.....	145
Çözümler	148

OLASILIK DAĞILIMLARI

OLASILIK.....	150
Binom Olasılık Dağılımı	150
Poisson Olasılık Dağılımı	152
Hipergeometrik Olasılık Dağılımı.....	153
Normal Olasılık Dağılımı.....	160
Standart Normal Olasılık Dağılımı	161
Çözümlü Test.....	163
Çözümler	166
Çözümlü Deneme - 1	168
Çözümler	171
Çözümlü Deneme - 2.....	174
Çözümler	177

UZAYDA VEKTÖRLER

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ kümesine 3 boyutlu vektör uzayı denir. Vektörlerin başlangıç noktası orijin olmak üzere, \mathbb{R}^3 ün her noktasına bir vektör karşılık gelir.



$\vec{OP} = (a, b, c)$ ise a, b, c sayılarına \vec{OP} yer vektörünün bileşenleri denir. P noktasının orijine olan uzaklığına, \vec{OP} vektörünün normu (uzunluğu) denir ve $|\vec{OP}|$ ile gösterilir.

$\vec{OP} = (a, b, c) \Rightarrow |\vec{OP}| = |\vec{P}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dir.

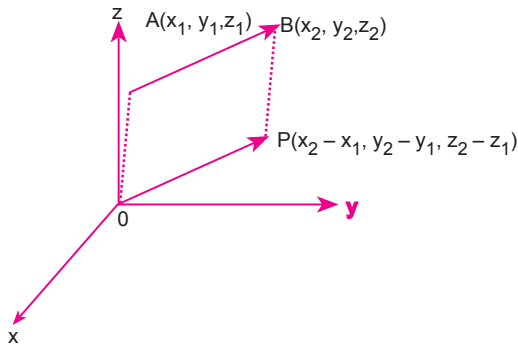
\vec{AB} vektörüne eş, başlangıç noktası orijin olan \vec{OP} vektörüne, \vec{AB} vektörünün yer vektörü denir.

$A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ ise;

$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$|\vec{OP}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Normu 1 olan vektöre birim vektör denir.



Çıkış Sorular

Uzayda $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, -4)$ ve $C(m, 2, -1)$ noktaları veriliyor.

$\vec{AB} \perp \vec{AC}$ olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -27 B) -29 C) 14 D) 29 E) 27

Çözüm

$$\vec{AB} = (1, -3, -7) \quad \vec{AC} = (m - 1, 0, -4)$$

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ dir.}$$

$$1(m - 1) + (-3) \cdot 0 + (-7)(-4) = 0$$

$$m + 27 = 0$$

$$m = -27 \text{ olur.}$$

Cevap A

Örnek

$A(1, -1, 1)$ ve $B(2, a, -3)$ noktaları veriliyor.

$|\vec{AB}| = \sqrt{26}$ br olduğuna göre a sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm

$$\vec{AB} = (1, a + 1, -4)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{26} \Rightarrow \sqrt{1^2 + (a + 1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 + 17 = 26$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow |a + 1| = 3 \Rightarrow a = 2 \text{ veya } a = -4$$

Çıkış Sorular

Dik koordinat düzleminde verilen \vec{u} ve \vec{v} vektörleri için $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 16$ olduğuna göre, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ değeri kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

Çözüm

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$\frac{(\|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\|) \cdot (\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\|)}{16} = 4 \cdot 8$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\| = 2$$

$$+ \|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 16$$

$$2 \cdot \|\vec{u} + \vec{v}\| = 18 \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = 9 \text{ olur.}$$

Cevap B

İki Vektörün Paralellliği

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $k \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ olmak üzere,

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b} \text{ dir.}$$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \text{ dir.}$$

Örnek

A(2, 4, 2) ve B(6, 2, 4) noktaları ile

$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$ vektörü veriliyor.

$\vec{AB} // \vec{v}$ olduğuna göre, (x, y) ikilisini bulunuz.

Çözüm

$$\vec{AB} = (4, -2, 2)$$

$$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$$

$$\vec{AB} // \vec{v} \Rightarrow \frac{x - y}{4} = \frac{x + 2y}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) = (1, -1) \text{ olur.}$$

Vektörlerin Lineer Bileşimi

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n \in \mathbb{R}^3$ ve $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{R}$

olmak üzere,

$\vec{u} = k_1 \cdot \vec{V}_1 + k_2 \cdot \vec{V}_2 + k_3 \cdot \vec{V}_3 + \dots + k_n \cdot \vec{V}_n$ vektörüne,

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ vektörlerinin lineer bileşimi denir.

Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık

\mathbb{R}^3 de $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ vektörleri verilsin.

$c_1 \cdot \vec{V}_1 + c_2 \cdot \vec{V}_2 + c_3 \cdot \vec{V}_3 + \dots + c_n \cdot \vec{V}_n = \vec{0}$ denklemi yalnız

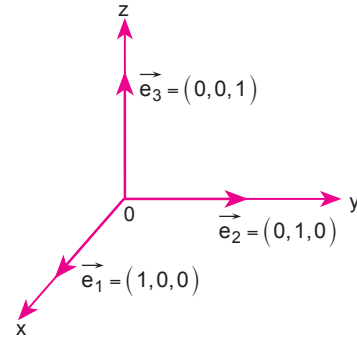
$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ için sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımsız; $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ değerlerinden en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımlı denir.

$V = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\}$, \mathbb{R}^3 uzayının bir alt kümesi olmak üzere $\det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n) = A$ olsun.

I. $A = 0 \Leftrightarrow V$ kümesi lineer bağımlı,

II. $A \neq 0 \Leftrightarrow V$ kümesi lineer bağımsızdır denir.

Uyarı!

Standart Birim Vektörleri

\mathbb{R}^3 vektör uzayında üzerinde bulunduğu eksen ile pozitif yönlü birim vektörlere, standart birim vektörler denir.

$$\vec{e}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_3 = \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı

Her $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ için;

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

şeklinde tanımlanan işleme, " \mathbb{R}^3 de Öklid iç çarpım işlemi" denir.

Özellikleri

- $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$, $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ (değişme özelliği)
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ (çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)

1.BÖLÜM

Örnek

$\vec{A} = (3, a, -2)$ ve $\vec{B} = (a, 2, 10)$ vektörleri veriliyor.
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 5$ olduğuna göre a sayısının kaç olacağını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= 5 \\ 3a + 2a - 2 \cdot 10 &= 5 \\ 5a &= 25 \\ a &= 5\end{aligned}$$

İki Vektör Arasındaki Açık

$\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ verilsin. \vec{A} ve \vec{B} vektörleri arasındaki açının ölçüsü α olmak üzere,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha \text{ olur.}$$

$\vec{A} \perp \vec{B}$ ise $\alpha = 90^\circ$ için $\cos \alpha = 0$ olduğundan
 $\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ olur.

Örnek

$\vec{A} = (-1, 2, 3)$ ve $\vec{B} = (1, -1, 2)$ vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta \\ -1 - 2 + 6 &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}\end{aligned}$$

Örnek

$\vec{A} = (1, 1, 2)$ ve $\vec{B} = (\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, 4)$ vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 + 8 = 6 \\ |\vec{A}| &= \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{B}| &= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (-\sqrt{3} - 1)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} + 16} \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \\ \cos \theta &= \frac{6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} \text{ olur.} \\ \cos \theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Örnek

\vec{A} ile \vec{B} vektörleri arasındaki açının ölçüsü 45° ,

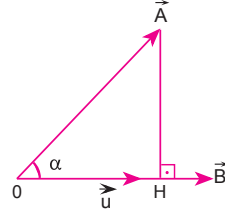
$|\vec{A}| = 2\sqrt{2}$ ve $|\vec{B}| = 3$ olduğuna göre,

$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (3\vec{A} - 2\vec{B})$ iç çarpımının sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (3\vec{A} - 2\vec{B}) &= 3 \cdot \vec{A} \cdot \vec{A} + 3 \cdot \vec{A} \cdot \vec{B} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} - 2 \cdot \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= 3 \cdot |\vec{A}|^2 + \vec{A} \cdot \vec{B} - 2 \cdot |\vec{B}|^2 \\ &= 3 \cdot 8 + 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ - 2 \cdot 9 \\ &= 24 + 6 - 18 \\ &= 12 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Dik İzdüşüm Vektörü



$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1), \vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri verilsin.

\vec{A} vektörünün \vec{B} vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü

$\vec{OH} = \vec{u}$ olsun. \vec{A} ile \vec{B} arasındaki açı α olmak üzere;

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \text{ dir. } \cos \alpha = \frac{\|\vec{u}\|}{|\vec{A}|} \text{ yazılırsa}$$

$$\frac{\|\vec{u}\|}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \Rightarrow \|\vec{u}\| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \text{ dik izdüşüm vektörü-}$$

nün uzunluğudur.

$$\vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \text{ olacağından}$$

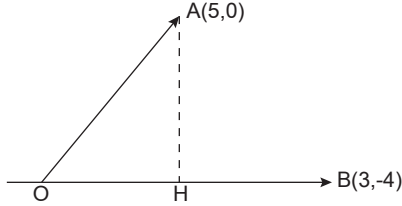
$$\vec{u} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \cdot \vec{B} \text{ dik izdüşüm vektörünü verir.}$$

Çıkış Sorular

Düzlemde $A(5, 0)$ vektörünün $B(3, -4)$ vektörü üzerine dik izdüşüm vektörünün uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm



$$\|OH\| = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{B}\|}$$

$$\|OH\| = \frac{5 \cdot 3 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\|OH\| = 3 \text{ br bulunur.}$$

Cevap C

Örnek

$\vec{A} = (1, 4, 2)$ ve $\vec{B} = (-2, 1, 3)$ vektörleri veriliyor.

\vec{A} 'nın \vec{B} üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğunun ve dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{-2 + 4 + 6}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

Dik izdüşüm vektörü;

$$\vec{u} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \cdot \vec{B} = \frac{8}{14} \cdot (-2, 1, 3) = \frac{4}{7}(-2, 1, 3) \text{ olur.}$$

Vektörel (Çapraz) Çarpım

\mathbb{R}^3 te $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri verilsin.

\vec{A} ve \vec{B} vektörlerinin vektörel çarpımı bir \vec{C} vektörünü verir.

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ şeklinde gösterilir.

$\alpha: \vec{A}$ vektörü ile \vec{B} vektörü arasındaki açı

$\vec{P}; \vec{A}$ vektörü ile \vec{B} vektörünün yönünü gösteren birim vektör olmak üzere;

\vec{A} ile \vec{B} nin vektörel çarpımı :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{P} \cdot \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \alpha \text{ dir.}$$

Elde edilen \vec{C} vektörü, \vec{A} ve \vec{B} vektörlerinin ait olduğu düzleme dik olan bir vektördür.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri, vektörel çarpımı verir.

Örnek

$\vec{A} = (3, 1, 0)$ ve $\vec{B} = (0, 1, 2)$ olduğuna göre,

$\|\vec{A} \times \vec{B}\|$ kaçtır?

Çözüm

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} \\ = (2, -6, 3)$$

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} \\ = \sqrt{4 + 36 + 9} \\ = 7 \text{ olur.}$$

Özellikleri:

$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{R}^3$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

I. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

II. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

III. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

IV. $(k \cdot \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k \cdot \vec{B}) = k \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), k \in \mathbb{R}$

V. $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \theta$ (θ : \vec{A} ve \vec{B} vektörleri arasındaki açıdır.)

VI. $\left. \begin{matrix} \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \rangle = 0 \\ \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{B} \rangle = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{A} \times \vec{B} \text{ ve } \vec{B} \perp \vec{A} \times \vec{B} \text{ dir.}$