Veri Bilimi İçin Uygulamalı Temel Lineer Cebir

Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY

PEGEM AKADEMİ

Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY

VERİ BİLİMİ İÇİN UYGULAMALI TEMEL LİNEER CEBİR

ISBN 978-625-6140-73-8

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarına aittir.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 2000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere http://pegem.net adresinden ulaşılabilmektedir.

1. Baskı: Ocak 2025, Ankara

Yayın-Proje: Selcan Durmuş
Dizgi-Grafik Tasarım: Tuğba Kaplan
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Ay-bay Kırtasiye İnşaat Gıda Pazarlama ve Ticaret Ltd. Şti.
Çetin Emeç Bulvarı 1314. Cadde No: 37A-B Çankaya/ANKARA

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 46661

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi
Macun Mahallesi 204 Cad. No: 141/33, Yenimahalle/Ankara
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: yayinevi@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Bu kitabı Matematik Öğretmeni ve Avukat 2008 de kaybettiğim
sevgili babam İsmail İhsan Atay
ve halen beni destekleyen, düşünen ve sevgiyle her zorluğa katlanan
sevgili annem Öğretmen Hatice Atay'a
minnetle ithaf ediyorum.

ÖN SÖZ

Son 10 yılda Veri Bilimi, Veri Madenciliği, Büyük Veri, Makine Öğrenmesi, Yapay Zeka gibi alanların birbirlerini hem besleyerek ve hem de birbirleriyle yarışarak gelişmelerine tanık olduk. Ayrıca diğer bilim dalları ile etkileşime girdiği gördük ve daha da kuvvetle etkileşime gireceğini kolayca göreceğiz.

Veriye dayalı bu bilimsel fırtınanın her geçen gün kuvvetlenerek ve etkisini yadsınamaz şekilde artırarak geliştiğine tanık olacağız gibi durmaktadır.

Bu anlayışla, sizlere sunulan bu kitabın amacı: Veri Biliminin temel alanlarından biri olan Lineer Cebir ve temel uygulamaları konusunda okuyucunun yetkinliklerini artırmaktır. Ünlü bir Matematikçi olan Lobachevski'nin belirttiği gibi "Matematiğin hiçbir dalı yoktur ki, ne kadar soyut olursa olsun, bir gün gerçek dünyada uygulama alanı bulmasın". Lineer Cebirde öğrenenler açısından ne kadar soyut gibi algılansa da, yapay zeka ve veri bilimi alanında kendine etkin bir uygulama alanı bulmuştur.

Bu alana yönelmek isteyen farklı alanlardan Veri Bilimciye, araştırmacıya gerek duyabileceği temel yetkinlikleri kazandırmak amacıyla, bu kitap temel düzeyde tutulmuştur. Matematiksel anlamda kullanıcı dostudur ve uygulama odaklı olarak tasarlanmıştır.

Diğer temel alanlar olan Temel Matematik Analiz (Calculus) serisi konular, İstatistik, Yazılım Mühendisliği alanlarıyla olan kuvvetli bağları nedeniyle, Lineer Cebir konulu bu kitap Veri Bilimi uygulayıcılarına faydalı olacağı ümit etmekteyim.

Yukarıda belirtilen nedenlerden dolayı, bu kitap İstatistik, Bilgisayar Mühendisliği, Yapay Zeka Mühendislikleri ve Temel İstatistik Veri Bilimi bölümlerinde ders materyali olarak kullanılabilecek öğrenen dostu bir kitaptır.

Bu kitabın yayınlanmasında emeği geçen PEGEM Akademi ve Yayıncılık ekibine teşekkürlerimi sunarım.

Tüm öğrenenlere faydalı olması dileklerimle.

Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY
ORCID No: 0000-0002-7326-5750

Ankara 2025

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

HALKALAR: CİSİMLER

Cebirsel Yapılar

Lineer cebirde önemli bir yere sahip olan cebirsel yapıların temel tanımlarını vereceğiz.

Gruplar

$G \neq \emptyset$ bir küme

$*: G \times G \to G$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere,

(1) (Birleşme) $\forall$ a, b, c, $\in$ G için

$(a * b) * c = a * (b * c)$

(2) (Birim)$\forall$ a $\in$ G için bir e $\in$ G vardır ve

e*a=a*e=a

(3) (Ters eleman) $\forall$ a $\in$G için $a^{-1} \in$ G var.

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Şartları sağlanıyorsa (G, $*$) yapısına Grup denir.

Tanım 1.1.

Bir (G , *) grubunda, her a, b, $\in$G için a$*$b=b$*$a oluyorsa, G grubuna değişmeli veya komütaftir denir.

Örnek 1:

(1) $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{C}$ bilinen toplama işlemine göre değişmeli gruptur. Fakat $\mathbb{N}$, toplama işlemine göre grup değildir. Çünkü a$\in$ $\mathbb{N}$ için –a $\notin$ $\mathbb{N}$ dır.

(2) $F = \left\{f: s \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \right\}$ S kümesi fonksiyonlarının bileşkesi işlemi altında bir gruptur. Değişmeli değildir.

Tanım 1.2.

$R \neq \emptyset$ kümesi (+) ve (.) gösterilen ikili işlem altında

(1) (R +) değişmeli gruptur.

(2) $\forall a, b, c \in R$ için

$(ab)\,c = a\,(bc)$,

(3) $\forall a, b, c \in R$ için

$(a+b)c = ac+bc$ ve

$c(a+b) = ca+cb$,

şartları sağlanıyorsa (R, +, .) cebirsel yapısına **halka** denir.

Tanım 1.3.

$\forall a, b, \in R$ için $ab=ba$ oluyorsa R halkasına **değişmeli halka** denir.

$\forall a, \in R$ için $ae=ea=a$, $e \in R$ varsa, R halkasına **birimli halka** denir.

Tanım 1.4.

Birimli, değişmeli bir R halkasına, + işlemine göre birim elemanı, (.) işlemine göre tersi varsa, R halkasına **cisim** denir.

Örnek1:

(1) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ birimli değişmeli bir halka olup, aynı zamanda cisimdir.

(2) $\mathbb{Z}$ ise birimli değişmeli bir halka olup, cisim değildir. Çünkü $2 \in \mathbb{Z}$ nın çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{2}$ olup, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ dir.

$\mathbb{Z}$ çift tam sayılar kümesi $2\,\mathbb{Z}$ değişmeli bir halkadır, fakat $1 \notin 2\mathbb{Z}$ olduğundan birimli değildir.

ÖNBİLGİLER

Fonksiyonlar

A ve B baştan farklı iki küme olmak üzere, A'nın her elemanının B'nin yalnız bir elemanına götüren kurala **fonksiyon** denir.

Örneğin

$f : R \rightarrow R$

$x \rightarrow x^2$ şeklinde tanımlanan kural bir fonksiyondur, fakat

$g : R \rightarrow R$

$x \to \sqrt{x}$ şeklinde tanımlanan kural fonksiyon değildir. Çünkü x = 4 noktasında g(4)=2 ve g(4)= -2 dir.

Şimdi fonksiyonlarla ilgili bazı tanımları verelim:

Tanım 1.5.

$f : A \to B$ bir fonksiyon ise A'ya tanım kümesi, B'ye değer kümesi denir.

$\dot{I}m(f) = \{f(a) : a \in A\}$ kümesine görüntü kümesi denir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi, bir fonksiyonun değer kümesi ile görüntü kümesi aynı olmak zorunda değildir. Örneğin;

$f : R \to R$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu için değer kümesi R, fakat görüntü kümesi R^+, dir.

Tanım 1.6.

Eğer $x \neq y$ iken $f(x) \neq f(y)$ ise fonksiyonuna 1-1 fonksiyon denir.

Tanım 1.7.

Eğer değer kümesi, görüntü kümesine eşitse f fonksiyonuna **örten** (üzerine örten) **fonksiyon** denir.

Örneğin: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı fonksiyon 1 – 1 örten değildir. Çünkü $\dot{I}m(f) = R^+ \cup \{0\} \neq R$'dır. $-1 \neq 1$ iken $f(-1)=1= f(1)$ olduğundan f, 1 – 1 değildir.

Fakat: $g: R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}$, $g(x) = x^2$ fonksiyonu için $\dot{I}m(g) = R^+ \cup \{0\}$ olduğundan g fonksiyonu örten ve farklı noktaların farklı görüntüleri olduğundan g, 1-1' dır.

Eğer $f : A \to B$, 1- 1 ise $f^{-1} : \dot{I}m(f) \to A$ tanımlı bir fonksiyondur.

2. BÖLÜM

MATRİSLER

Tanım 2.1.a.

F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olarak verilen bir diktörgen tabloya **matris** denir.

$i = 1, 2, \ldots, m$ indeksi için

$r_i = [a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \ldots a_{in}]$

ifadesine matrisin **i inci satırı** denir. Ayrıca, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ için

$$e_j = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

ifadesine matrisin **j inci sütunu** denir.

Tanım 2.1.b.

m satırlı ve n sütunlu matrise **mxn boyutlu** (mertebeli) veya bir **mxn matrisi** denir.

i-yinci satır ve j-yinci sütunun kesişiminde bulunan matrisin (tablonun) elemanına matrisin (a_{ij})-yinci elemanı denir. Genel olarak, $A = (a_{ij})_{mxn}$ notasyonu ile gösterilir.

NOT 2.1:

Bir matrisin sütunlarının sayısı satırlarının sayısına eşit ise, buna **karasel** matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}_{3x4} \qquad \rightarrow 3 \text{ x } 4 \text{ mertebeli bir matris}$$

Satır sayısı

Sütun sayısı

Matrislerin Toplaması

i=1, …, m, j=1, …. n için,

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{A} = (a_{ij}) \\ \mathbf{B} = (b_{ij}) \\ \mathbf{C} = (c_{ij}) \end{matrix}\right\} \qquad \begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (a_{ij})_{mxn} + (b_{ij})_{mxn} \\ &= (a_{ij} + b_{ij})_{mxn} \\ &= (c_{ij})_{mxn} = \mathbf{C} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{3x4} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3x4}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 & 7 \\ 9 & 11 & 9 & 12 \\ 6 & 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{3x4}$$

NOT 2.2.

A= (a_{ij}) ⇒ -**A**= (-a_{ij}) olur

Teorem 2.1.

F bir cisim olmak üzere, elemanları F cismine ait olan bütün mxn matrislerin kümesi $M_{m,n}$(F); matrislerin toplama işlemine göre değişmeli bir grup teşkil eder. Yani aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) Her **A,B**∈$\mathbf{M}_{m,n}$ (F) için,

A+**B** ∈$\mathbf{M}_{m,n}$ (F) **kapalılık özelliği**

(ii) Her **A,B**∈$\mathbf{M}_{m,n}$ (F) için,

A+(**B**+**C**)=(**A**+**B**)+**C** **birleşme özelliği**