

Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım Özel Eğri ve Yüzeyler

Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

**ARTIRILMIŞ GERÇEKLIK VE SANAL GERÇEKLIK TEKNOLOJİLERİ İLE
ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ İÇERİK:**

Geogebra Programında Çizilmiş Örnekler
QR Kare Kodlu Videolarla Destekli Örnekler
Geogebra Ar ile Artırılmış Gerçeklik (Ar) Uygulamaları
Sanal Gerçeklik (Vr) Video Uygulamaları
Artsteps İle Sanal Gerçeklik Sergi Videoları



Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIM
Özel Eğri ve Yüzeyler

ISBN 978-625-6287-34-1

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarına aittir.

© 2025, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz, dağıtılamaz. Bu kitap T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayineimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevidir**. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 2000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

1. Baskı: Ocak 2025, Ankara

Yayın-Proje: Selcan Durmuş
Dizgi-Grafik Tasarım: Tuğba Kaplan
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi
Macun Mahallesi 204 Cad. No: 141/33, Yenimahalle/Ankara
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: yayinevi@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

TEŞEKKÜR

Heyecan dolu bilim serüvenimde yol alabilmem için her daim desteklerini benden esirgemeyen, kıymetli annem Hafize KUŞAK, saygıdeğer babam ÇETİN KUŞAK ve özellikle sevgili canım kardeşim Hasibe KUŞAK' a bu eserin oluşumunda gösterdikleri sabır, fedakarlık ve destekleri için en kalbi hislerimle sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca sevgileriyle hayatımı güzelleştiren aile büyüklerimin hepsine gönülden desteklerinden dolayı en içten duygularıyla teşekkür ederim. Çalışmalarım bir an önce bitsin diye beni sabırsızlıkla ve heyecanla bekleyen benim kocaman yürekli minik kızım Berra Saliha SAMANCI'ya en içten duygularıyla minnettar olduğumu belirtmek isterim. Çalışmalarına desteğini esirgemeyen sevgili eşim Mustafa SAMANCI' ya teşekkür ederim. Ayrıca bilimin zorlu yollarında bana emeği geçen tüm saygıdeğer hocalarıma ve bana ilham veren sevgili öğrencilerime katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

ÖNSÖZ

GeoGebra programı, bilgisayar cebir sistemleri (BCS) ve dinamik geometri yazılımı (DGY) özelliklerini bir arada bulundurması, çeşitli dillere çevrilmiş olması, kurulumu ve kullanımı kolay olması, ücretsiz ve açık kaynak kodlu olması nedeniyle ilkokuldan lisansüstü eğitime kadar matematik ve geometri eğitiminde yaygın olarak kullanılmaktadır (Kutluca ve Zengin, 2011). Markus Hohenwarter, lisans ve lisansüstü çalışmalarında GeoGebra'nın ilk sürümünü yayınlamış ve 2001 yılında Salzburg Üniversitesi'nde doktora tezi çalışmaları sırasında programı daha da geliştirmiştir (Hohenwarter ve Lavicza, 2007). GeoGebra, basit kodlamalarla formülleri kolayca görselleştirme ve animasyonları oluşturma imkanı sağladığı için geometrik şekillerin anlaşılmasını artırmakta ve öğrencilerin öğrenme sürecine önemli katkılarda bulunmaktadır (Şimşek ve Yaşar, 2019).

Diğer yandan yenilikçi teknolojilerden Artırılmış gerçeklik (AG) (Augmented Reality (AR)) teknolojisi, eğitim dünyasında devrim niteliğinde değişiklikler yaratma potansiyeline sahip bir teknolojidir. AG teknolojisinde, kullanıcı gerçek dünyayı görmeye devam ederken dijital öğeleri gerçek dünya içerisinde görür ve deneyimler (Enes ve Buğra, 2020; Bayraktar ve Kaleli, 2007; Berryman 2012). Sanal gerçeklik (SG) (Virtual Reality (VR)) teknolojilerinde ise kullanıcıyı tamamen dijital bir ortamın içine yerleştirir ve fiziksel dünya ile bağlantısını keser. AG temel kavramları, 1968 yılında Ivan Sutherland ve öğrencisi Bob Sproull tarafından geliştirilen "The Sword of Damocles" adlı ilk başa takılan ekran (head-mounted display) ile ortaya konmuştur. SG kavramı ise, 1980'lerde Jaron Lanier tarafından geliştirilmiş ve popüler hale getirilmiştir. Lanier, aynı zamanda "sanal gerçeklik" terimini ilk kez kullanan kişidir. Her iki teknoloji de eğitimden eğlenceye, sağlık hizmetlerinden iş dünyasına kadar birçok alanda kullanılmakta ve gelecekte daha da yaygınlaşması beklenmektedir (Bowman, 2012; Bayraktar ve Kaleli, 2007). Bu teknolojilerde genellikle akıllı telefonlar, tabletler veya artırılmış gerçeklik gözlükleri kullanılır. Oculus Rift, HTC Vive ve Playstation VR örnekleri günümüzde bulunmaktadır. Bu cihazlar, kameralar ve sensörler aracılığı ile dijital bilgileri gerçek dünya görüntüleri üzerine bindirir. Kullanıcılar, dokunmatik ekranlar, ses komutları veya hareket algılayıcılar kullanarak gerçek dünyayla ve artırılmış öğelerle etkileşimde bulunur (Carmigniani ve diğerleri, 2011; Furth,2011).

Bu kitap özellikle üniversitelerin Matematik, Matematik-Bilgisayar, Matematik Öğretmenliği, Matematik Mühendisliği, Bilgisayar Mühendisliği, 3D Üretim Mühendisliği, Harita Mühendisliği, Mimarlık, Dijital Sanat, Grafik Tasarımı, Dijital Grafik Tasarım gibi bölümlerde Diferansiyel Geometri, Özel Eğriler ve Yüzeyler, Analitik Geometri, Uzay

Geometri derslerinde geometride incelenen özel eğri ve yüzeyleri, GeoGebra programında çizibilme ve sanal gerçeklik uygulamaları ile de nesnelerin daha iyi algılanabilmesini sağlayabilme amacıyla oluşturulmuştur. Matematik, Matematik-Bilgisayar, Matematik öğretmenliği, Matematik Mühendisliği alanlarında eğri ve yüzey kavramlarının etkileşimli eğitim materyalleri olarak kullanımı öğrencilere avantaj sağlayacaktır. Bu bölümlerin müfredatlarında yer verilen Analitik ve Diferansiyel Geometri gibi derslerde öğrencilerin çeşitli eğri ve yüzeyleri öğrenmesinde zenginleştirilmiş yeni teknolojik uygulamalarla öğrencilerin derse olan ilgisinin artacağı düşünülmektedir. 3D üretim, harita mühendisliği gibi bölümlerde ise eğri ve yüzey modellenmelerinin CAD/CAM yazılımları ve GIS uygulamaları için adaptasyonunda bu kaynak yol gösterici olabilecektir. Mimarlık, Dijital sanat, Dijital Grafik Tasarım, 3D üretim mühendisliğinde ise çeşitli tasarım süreçlerinde eğri ve yüzeylerin kullanılmasında el kitabı niteliğinde elverişli bir kaynak olacaktır. Ayrıca bu kitapta yer alan açılabilir ve regle yüzeyler, dijital tasarım ve sanayi üretim süreçlerinde oldukça yaygın bir şekilde kullanıldığı için bu alanlarda çalışan kişilerin matematiksel yöntemleri daha kolay anlayabilmesini sağlayacaktır.

GeoGebra programında yazılan lisans ve lisansüstü seviyesinde Türkçe kaynakların sınırlı olması, özel eğri ve yüzey çeşitlerinin tümünü birlikte alan bir kitabın halihazırda ülkemizde olmaması sebebiyle bu kitabın alana önemli bir katkı sunacağı düşünülmektedir. Özel eğri ve yüzeylerin yeni teknolojilerle desteklenmiş uygulamalarını içeren bu kitap ülkemizde alanındaki ilk ve öncü çalışmalardan biri olma özelliği taşımaktadır. Bu yenilikçi yaklaşım, teknolojinin eğitim materyallerine entegrasyonunu sağlayarak, öğrencilerin hem teorik hem de uygulamalı bilgiye erişimini kolaylaştırmaktadır. Özellikle artırılmış gerçeklik tabanlı görselleştirmeler, sanal simülasyonlar ve sanal sergiler, geometrik ve matematiksel kavramların daha etkili bir şekilde anlaşılmasını sağlamaktadır. Bu nedenle, söz konusu çalışma, yeni nesil teknolojik tabanlı müfredatla uyumlu olup, hem eğitim hem de araştırma alanında önemli bir ders kitabı niteliğinde olan bir kaynak olarak değerlendirilmektedir.

Öğrencilerimin motivasyonunu artırmak için özel eğri ve yüzeyler derslerini yenilikçi teknolojiler ile birleştirdiğim bu kitabın hem öğrencilerime hem de geometri alanında çalışan bilim insanlarına faydalı olacağı kanaatindeyim. Geometrinin gizemli ve büyüdü dünyasındaki güzellikleri öğrencilerime ve gelecek nesillere aktarabilmek ve olabildiğince onlara ilham olabilmek bir akademisyen olarak beni heyecanlandırmaktadır. Ülkemizde yeşerecek nice bilim neferlerine ilham olabilmek temennisiyle...

Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

İÇİNDEKİLER

1. KOORDİNAT SİSTEMLERİ	13
1.1. DÜZLEMDE KOORDİNAT SİSTEMLERİ	13
1.1.1. DÜZLEMDE KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMLERİ	13
1.1.2. EĞİK KOORDİNAT SİSTEMİ	14
1.1.3. KUTUPSAL KOORDİNAT SİSTEMLERİ	15
1.2. UZAYDA KOORDİNAT SİSTEMLERİ	16
1.2.1. AFİN KOORDİNAT SİSTEMİ VE AFİN ÇATI	17
1.2.3. KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİ	18
1.2.4. SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMLERİ	20
1.2.5. KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMLERİ	22
1.2.6. TOROİDAL KOORDİNAT SİSTEMİ	23
2. EĞRİLERİN ÇATILARI VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ	25
2.1. DÜZLEMSEL EĞRİLERİN SERRET-FRENET ÇATISI	25
2.1.1. BİRİM HIZLI DÜZLEMSEL EĞRİLERİN SERRET-FRENET ÇATISI	25
2.1.2. BİRİM HIZLI OLMAYAN DÜZLEMSEL EĞRİLERİN SERRET-FRENET ÇATISI	28
2.1.3. DÜZLEMSEL EĞRİLERİN KAPALI DENKLEMLERİNİN SERRET-FRENET ÇATISI	31
2.1.4. KUTUPSAL KOORDİNATLARDA DÜZLEMSEL EĞRİLERİN SERRET-FRENET ÇATISI	32
2.2. ÜÇ BOYUTLU EĞRİLERİN SERRET-FRENET ÇATISI	33
2.2.1. BİRİM HIZLI EĞRİLERİN SERRET-FRENET ÇATISI	33
2.2.2. BİRİM HIZLI OLMAYAN EĞRİLERİN SERRET-FRENET ÇATISI	39
3. ÖZEL EĞRİ ÇEŞİTLERİ	44
3.1. EĞRİLERİN ŞEKİLLERİNE GÖRE SINIFLANDIRILMALARI	44
3.2. EĞRİ DENKLEMLERİNİN TEMSİLLERİ	44
3.3. DÜZLEMDE İKİ BOYUTLU EĞRİLER	45
3.3.1. DÜZLEMDE DOĞRU	45
3.3.2. KONİKLER	47
3.3.2.1. ÇEMBER	48
3.3.2.2. ELİPS	51
3.3.2.3. HİPERBOL	55
3.3.2.4. PARABOL	60
3.3.3. KUTUPSAL KOORDİNATLARDAKİ DÜZLEMSEL EĞRİLER	63
3.3.3.1. DOĞRU	63
3.3.3.2. ÇEMBER	64

3.3.3.3. KARDİYOİD-KALP EĞRİSİ.....	65
3.3.3.5. İKİ BOYUTLU GÜL EĞRİLERİ.....	68
3.3.3.5.1. İKİ YAPRAKLI GÜL EĞRİSİ.....	68
3.3.3.5.2. ÜÇ YAPRAKLI GÜL.....	70
3.3.3.5.3. DÖRT YAPRAKLI GÜL.....	71
3.3.3.5.4. SEKİZ YAPRAKLI GÜL.....	72
3.3.3.5.4. DİĞER GÜL ÇEŞİTLERİ.....	73
3.3.3.5.5. KELEBEK EĞRİLERİ.....	74
3.3.4. DÜZLEMDE SPİRAL ÇEŞİTLERİ.....	75
3.3.4.1. ARCHIMEDEAN VE ARCHIMEDES SPİRALLERİ.....	75
3.3.4.2. ATOM SPİRALİ.....	77
3.3.4.3. SİNUSOİDAL SPİRALİ.....	78
3.3.4.4. LOGARİTMİK SPİRAL.....	79
3.3.4.5. GALİLE SPİRALİ.....	80
3.3.4.6. FERMAT SPİRALİ.....	81
3.3.4.7. PARABOLİK SPİRAL.....	83
3.3.4.8. LİTUUS SPİRALİ.....	84
3.3.4.9. ÇEMBERİN İNVOLÜTÜ.....	85
3.3.4.10. EPİ SPİRAL.....	86
3.3.4.11. POINSON SPİRALİ.....	88
3.3.4.12. RESİPROKAL SPİRALİ-HİPERBOLİK SPİRALİ.....	89
3.3.4.13. KOHLEİD SPİRALİ.....	90
3.3.4.14. İZDÜŞÜM SPİRALİ.....	91
3.3.4.15. HİPIAS'IN DÖRTGENİ.....	92
3.3.5. KAYMADAN YUVARLANMA HAREKETİ İLE OLUŞTURULAN DÜZLEMSEL KİNEMATİK EĞRİLER-RULET EĞRİLERİ.....	94
3.3.5.1. TROKOİD.....	94
3.3.5.2. HİPOTROKOİD.....	96
3.3.5.3. EPİTROKOİD.....	100
3.3.5.4. SİKLOİD.....	103
3.3.5.5. EPİSİKLOİD.....	105
3.3.5.6. NEPROİD.....	108
3.3.5.7. HİPOSİKLOİD.....	110
3.3.5.8. SİSSOİD EĞRİSİ.....	116
3.3.5.9. STROFOİD- DEKART İLMİĞİ.....	118
3.3.6. DİĞER ÜNLÜ DÜZLEMSEL EĞRİLER.....	119
3.3.6.1. ASTROİD-YILDIZ EĞRİSİ.....	119
3.3.6.2. PASCAL LİMACONU.....	121
3.3.6.3. SIRT EĞRİSİ.....	122



3.3.6.4. CASSİNİ OVALİ	123
3.3.6.5. KARTEZYEN OVALİ	125
3.3.6.6. BERNOLLİ LEMNİSKATI	126
3.3.6.7. SEKİZ EĞRİSİ veya GERONO LEMNİSKATI	128
3.3.6.8. KATENERİ	129
3.3.6.9. TRAKTRİS EĞRİSİ.....	130
3.3.6.10. KARDİÖİD	132
3.3.6.11. İKİ BOYUTLU BASİN EĞRİSİ.....	133
3.3.6.12. FREETH'in NEFROİDİ.....	134
3.3.6.13. CAYLEY'İN SEKSİTİĞİ-ALTILISI	135
3.3.6.14. LİSSAJAUS veya BOWDITCH EĞRİSİ	137
3.3.6.15. DÜRER KONKOİDİ	139
3.3.6.16. MERMİ UCU EĞRİSİ	140
3.3.6.17. ABDANK-ABAKANOWİCZ DÖRTGENİ	141
3.3.6.18. AGNESİ EĞRİSİ.....	142
3.3.6.19. TSCHIRNHAUSEN KÜBİK EĞRİSİ	144
3.3.6.20. BEETLE EĞRİSİ	145
3.3.6.21. KORNOİD	146
3.4. ÜÇ BOYUTLU UZAYDA EĞRİLER	147
3.4.1. UZAYDA DOĞRU	147
3.4.2. KÜRESEL EĞRİLER.....	149
3.4.2.1. CELİLA KÜRESEL EĞRİSİ	151
3.4.2.2. ÜÇ BOYUTLU BASİN EĞRİSİ-KÜRESEL SİNÜSOİD EĞRİSİ.....	154
3.4.2.3. KÜRESEL SİKLOİD EĞRİSİ	155
3.4.2.4. KÜRESEL TROKOİD EĞRİSİ	157
3.4.2.5. KÜRESEL UYDU EĞRİSİ.....	158
3.4.2.6. KÜRENİN KÜRESEL HATTI.....	160
3.4.2.7. TENİS TOPU EĞRİSİ	161
3.4.3. SİLİNDİR ÜZERİNDEKİ EĞRİLER.....	162
3.4.3.1. SİLİNDİRİK EĞRİLER.....	162
3.4.3.2. BİSİLİNDİRİK EĞRİ veya BASİN EĞRİSİ.....	163
3.4.3.3. SİLİNDİRİK SİNÜS EĞRİSİ-ÜÇ BOYUTLU BASİN EĞRİSİ	166
3.4.3.4. TÜRK FESİ EĞRİSİ veya SİLİNDİRİK BİLARDO DÜĞÜMÜ	167
3.4.3.5. SİLİNDİRİK SİNÜS DALGA EĞRİSİ	168
3.4.3.6. SİLİNDİRİK TEĞET DALGA EĞRİSİ	170
3.4.3.7. STEİNMETZ EĞRİSİ.....	171
3.4.3.8. SİLİNDİRİKONİKAL EĞRİSİ.....	172
3.4.3.9. KÜRESEL SPHERO SİLİNDİRİK EĞRİSİ	174

3.4.3.10. VİVANİ EĞRİSİ	175
3.4.3.11. ARCHYTAS EĞRİSİ	177
3.4.4. TOR YÜZEYİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLER	179
3.4.4.1. TOR YÜZEYİNİN ASİMTOTİK EĞRİSİ.....	179
3.4.5. ÜÇ BOYUTLU GÜL EĞRİLERİ GÜL EĞRİLERİ.....	181
3.4.5.1. BASİN EĞRİSİ	181
3.4.5.2. KONİK GÜL EĞRİSİ	184
3.4.6. HELİS EĞRİLERİ	185
3.4.6.1. GENEL HELİS.....	185
3.4.6.2. SLANT HELİS	186
3.4.6.3. C-SLANT HELİS	186
3.4.6.4. REGLE HELİSOİD ÜZERİNDEKİ HELİS	187
3.4.6.5. SİLİNDİRİK HELİS-DAİRESEL HELİS	190
3.4.6.6. KONİKAL HELİS.....	192
3.3.6.14. CONCHO-SPİRALİ.....	206
3.4.6.7. ELİPTİK HELİS	209
3.4.6.8. KÜRESEL HELİS.....	212
3.4.6.9. CELİLA veya KÜRESEL ARŞİMET SPİRALİ	215
3.4.6.10. DÖNEL PARABOLOİD ÜZERİNDEKİ HELİS.....	218
3.4.6.11. HİPERBOLOİD ÜZERİNDEKİ HELİS	220
3.4.6.12. TORUS ÜZERİNDEKİ HELİS	231
3.4.6.13. KATENOİDAL HELİS	233
3.4.6.14. DNA ÇİFT SARMAL YAPISI	236
3.4.7. BİR EĞRİDEN ÜRETİLEN EŞLENİK EĞRİ ÇİFTLERİ	238
3.4.7.1. İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTİ.....	238
3.4.7.2. BERTRAND EĞRİ ÇİFTİ	243
3.4.7.3. MANNHEİM EĞRİ ÇİFTİ	246
3.4.7.4. PEDAL EĞRİSİ	249
3.4.7.5. KONTRAPEDAL EĞRİSİ.....	259
3.4.7.5.1. BALIK EĞRİLERİ	266
3.4.7.6. PARALEL EĞRİ-OFFSET EĞRİSİ.....	268
3.4.8. DİĞER ÜÇ BOYUTLU EĞRİ ÇEŞİTLERİ.....	276
3.4.8.1. FOKAL EĞRİ	276
3.4.8.2. SALKOWSKİ EĞRİSİ	281
3.4.8.3. SMARANDACHE EĞRİSİ	283
4.ÖZEL YÜZEYLER.....	289
4.1. DÜZLEM	289



4.2. KÜRE	290
4.3. KUADRATİK YÜZEYLER	293
4.3.1. ELİPSOİD	294
4.3.1.1. STEREOGRAPHIC ELİPSOİD	297
4.3.1.2. MERCATOR ELİPSOİD	298
4.3.1.3. ASTROİDAL ELİPSOİD YÜZEYİ	299
4.3.2. HİPERBOLOİD.....	300
4.3.2.1. TEK KANATLI HİPERBOLOİD	300
4.3.2.2. ÇİFT KANATLI HİPERBOLOİD	302
4.3.2.3. ELİPTİK HİPERBOLOİD	303
4.3.2.3.1. Tek Kanatlı Eliptik Hiperboloid	303
4.3.2.3.2. Çift Kanatlı Eliptik Hiperboloid.....	305
4.3.3. PARABOLOİD	306
4.3.4. ELİPTİK PARABOLOİD.....	307
4.3.5. HİPERBOLİK PARABOLOİD.....	309
4.3.6. KONİ.....	311
4.3.6.1. DİK DAİRESEL KONİ.....	312
4.3.6.2. ELİPTİK KONİ.....	314
4.3.7. SİLİNDİR.....	315
4.3.7.1. DAİRESEL SİLİNDİR.....	316
4.3.7.2. ELİPTİK SİLİNDİR.....	317
4.3.7.3. PARABOLİK SİLİNDİR	320
4.3.7.4. HİPERBOLİK SİLİNDİR	322
4.4. BAZI DİĞER ÜNLÜ YÜZEYLER.....	324
4.4.1. TORUS YÜZEYLERİ	324
4.4.1.1. DAİRESEL-HALKA TORUS.....	324
4.4.1.2. BOYNUZ TORUS YÜZEYİ.....	325
4.4.1.3. MİL TORUS YÜZEYİ	326
4.4.1.4. ELİPTİK TORUS YÜZEYİ	327
4.4.1.5. SİNÜS TOR YÜZEYİ.....	328
4.4.1.6. CLIFFORD TORUS YÜZEYİ.....	329
4.4.1.7. RIDGED TORUS YÜZEYİ	331
4.4.1.8. TWISTED TOR YÜZEYİ.....	332
4.4.2. MÖBIUS ŞERİDİ	334
4.4.3. KLEIN ŞİŞESİ.....	335
4.4.4. EYER (SEMER) YÜZEYİ.....	338
4.4.5. SEKİZ YÜZEYİ.....	338
4.4.6. ASTROİDAL YÜZEYİ	340
4.4.7. WHITNEY ŞEMSİYE YÜZEYİ	341
4.4.8. STEINER ROMAN YÜZEYİ.....	341
4.4.9. CROSS CAP YÜZEYİ	344
4.4.10. BOY YÜZEYİ	345

4.4.11. BOUR YÜZEYİ	347
4.4.12. CARTAN ŞEMSIYE YÜZEYİ	348
4.4.13. PSEUDO CROSS CAP YÜZEYİ	349
4.4.14. YUMURTA KUTUSU YÜZEYİ	350
4.4.15. BOHEMIAN DOME YÜZEYİ.....	351
4.4.16. SİNÜS YÜZEYİ	352
4.4.17. BONBON YÜZEYİ	353
4.5. EĞRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİK ÖZELLİKLERİNDEN ELDE EDİLEN ÖZEL YÜZEYLER.....	354
4.5.1. ÖTELEME YÜZEYİ.....	354
4.5.2. PARALEL YÜZEYLER.....	356
4.5.3. REGLE YÜZEYLER	358
4.5.3.1. HELİSOİD YÜZEYİ.....	360
4.5.3.1.1. AÇILABİLİR HELİSOİD	362
4.5.3.1.2. SAĞ HELİSOİD	363
4.5.3.1.3. MİNİMAL HELİSOİD.....	364
4.5.3.1.4. TOROİDAL HELİSOİD	365
4.5.3.1.5. GENELLEŞTİRİLMİŞ HELİSOİD	367
4.5.3.2. MÖBIUS ŞERİDİ	368
4.5.3.3. TEK KANATLI HİPERBOLOİD	369
4.5.3.4. HİPERBOLİK PARABOLOİD	370
4.5.3.5. PLÜCKER KONOİDİ.....	371
4.5.3.6. WALLİS KONİK KENAR YÜZEYİ.....	373
4.5.3.7. KATALAN REGLE YÜZEYİ.....	375
4.5.4. DÖNEL YÜZEYLER	376
4.5.5. KANAL VE TÜP YÜZEYLERİ	386
4.5.6. BÜKÜLMÜŞ YÜZEY	389
4.5.6.1. PROFİL EĞRİSİNE SAHİP BÜKÜLMÜŞ YÜZEY	390
4.5.6.2. MOBIUS ŞERİDİ	391
4.5.6.3. KLEİN ŞİŞESİ	392
4.5.6.4. KONKOİD BÜKÜLMÜŞ YÜZEYİ	393
4.5.6.5. LISSAJOUS EĞRİLERİNİN BÜKÜLMÜŞ YÜZEYİ.....	395
4.5.7. DENİZ KABUĞU YÜZEYİ.....	399
4.5.8. MİNİMAL YÜZEYLER	403
4.5.8.1. ENNEPER MİNİMAL YÜZEYLERİ.....	403
4.5.8.2. KATALAN MİNİMAL YÜZEYİ.....	404
4.5.8.3. SCHERK MİNİMAL YÜZEYİ-MİNİMAL HELİSOİD	406
4.5.8.4. BOUR MİNİMAL YÜZEYİ	408
5. EĞRİ VE YÜZEYLER VİDEO GALERİSİ	410
6.GEOGEBRA AR İLE ARTIRILMIŞ GERÇEKLİK UYGULAMASI ..	411



6.1.ARTIRILMIŞ GERÇEKLİK VE TARİHÇESİ	411
6.2. GEOGEBRA AR UYGULAMASI.....	412
7. EĞRİ VE YÜZEYLER SANAL GERÇEKLİK UYGULAMASI.....	421
7.1. SANAL GERÇEKLİK VE TARİHÇESİ	421
7.2. ARTSTEPS İLE EĞRİ VE YÜZEYLER SANAL GERÇEKLİK SERGİSİ.....	424
KAYNAKLAR	433
YAZAR HAKKINDA.....	437

1. KOORDİNAT SİSTEMLERİ

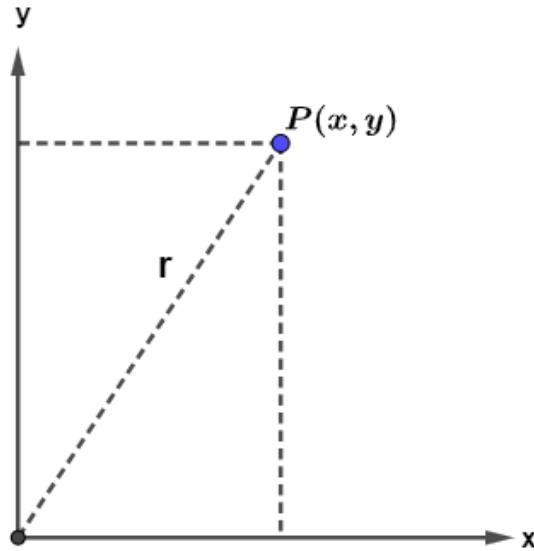
1.1. DÜZLEMDE KOORDİNAT SİSTEMLERİ

1.1.1. DÜZLEMDE KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Düzlemde noktaların konumlarını belirlemek için x ve y eksenlerinin kesişiminden oluşan iki boyutlu kartezyen koordinat sistemi kullanılmaktadır. Düzlemde kartezyen koordinat sistemindeki x ve y eksenleri üzerindeki pozitif yönlü $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ birim vektörleri bu sistemin baz vektörlerini oluşturmaktadır. Böylece düzlemde bir nokta $P(x, y)$ sıralı ikilisi ile temsil edilmektedir, bkz. Şekil 1.1.1. Dik koordinat sisteminde x ve y eksenlerinin kesişiminden oluşan düzlemde dört farklı bölge ile noktaların konumları belirlenmektedir. I. bölgedeki noktalar (x, y) , II. bölgedeki noktalar $(-x, y)$, III. bölgedeki noktalar $(-x, -y)$, VI. bölgedeki noktalar $(x, -y)$ işaretleri ile belirlidir. Ayrıca x eksenine apsis y eksenine ordinat da denilmektedir. Baz vektörleri cinsinden $P(x, y)$ noktasının orijin ile birleşiminden oluşan \vec{OP} konum vektörü $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ biçiminde yazılır. \vec{OP} konum vektörünün x ve y eksenleri ile yaptığı açılar, sırasıyla, θ_x, θ_y olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta_x \\ y = r \cos \theta_y \end{array} \right\}$$

ile doğrultman kosinüsleri oluşmaktadır.



Şekil 1.1.1. Kartezyen Koordinat Sistemi

1.1.2.EĞİK KOORDİNAT SİSTEMİ

İki boyutlu Öklid düzleminde herhangi bir afin çarpanın belirlediği koordinat sistemine iki boyutlu afin koordinat sistemi veya eğik koordinat sistemi denir. $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ ortonormal olmayan vektörler, eğik koordinat sistemin baz vektörlerini verir. Eğik koordinat sisteminin \vec{e}'_1 ve \vec{e}'_2 baz vektörlerinin x eksenine yaptığı α ve β açıları sırasıyla Şekil 1.1.2 de gösterilmiştir. Bu durumda eğik koordinat sisteminin baz vektörleri arasında dik olmayan bir $\beta - \alpha$ açısı oluşur. Eğik koordinat sisteminde alınan $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2|x_2 - x_1||y_2 - y_1| \cdot \cos(\alpha)}$$

ile hesaplanır. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ dik kartezyen koordinat sisteminin ve $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ eğik koordinat sisteminin orijinleri çakışık olan baz vektörleri olsun. P noktasının kartezyen koordinatları (x, y) eğik koordinatları ise (x', y') olsun. Bu koordinat sistemleri arasındaki geçiş matrisleri

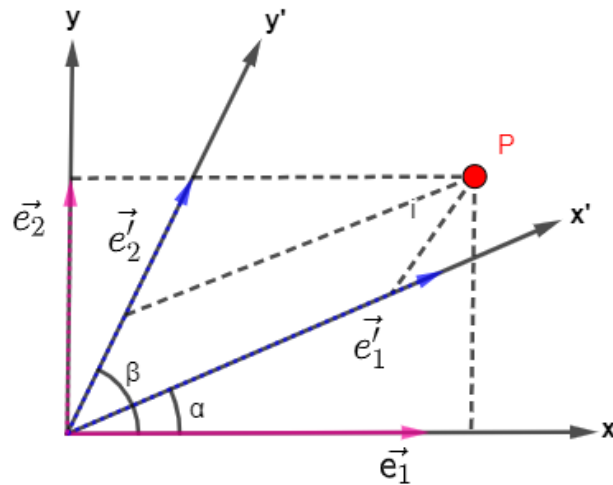
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ile verilir. Buradan

$$x' = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} (x \sin \beta - y \cos \beta)$$

$$y' = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

denklemleri elde edilir.



Şekil 1.1.2. Eğik Koordinat Sistemi