Geometri Öğretim Bilgisi

Editörler: Zülbiye TOLUK UÇAR
Recai AKKUŞ • Burçak BOZ YAMAN
Asuman DUATEPE PAKSU • Safure BULUT

PEGEM AKADEMİ

Editörler: Zülbiye TOLUK UÇAR - Recai AKKUŞ - Burçak BOZ YAMAN
Asuman DUATEPE PAKSU - Safure BULUT

GEOMETRİ ÖĞRETİM BİLGİSİ

ISBN 978-625-6357-13-6

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere http://pegem.net adresinden ulaşılabilmektedir.

1. Baskı: Aralık 2022, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türlüdür
Dizgi-Grafik Tasarım: Tuğba Kaplan
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler - Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 36306
Matbaa Sertifika No: 47865

<u>İletişim</u>

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

Bir anlatıya göre; dönemin kralı I. Ptolemy Elemanlar kitabının yazarı Öklid'e anlamakta zorlandığı "Geometriyi kestirmeden öğrenmenin bir yolu yok mu?" diye sorar. Söylenene göre Öklid şöyle der: "Geometriye giden bir *kral yolu* yoktur." Geometri öğrenmenin zorluğunu ve uzun bir çabanın sonunda elde edilen bir başarı olduğunu vurgulayan bu anekdot bir taraftan da geometriyi öğretmenin de uzun ve meşakkatli bir yol olduğunu söyler. Biz de elinizdeki bu kitapla, uzun ve meşakkatli bu yolun bir kısmını, matematik eğitimi araştırmacıları, matematik öğretmenleri, öğretmen adayları ve geometri öğrenmeye hevesliler için, bir nebze olsun, aydınlatmaya çalıştık.

Üç yıldan uzun süren yoğun bir çalışmanın sonucu olan bu kitabın temel amacı, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının geometri öğretim bilgisine katkı sunmaktır. İçerikte ilkokuldan liseye kadar geometri kavramları ve geometrik yapılar matematiksel açıdan incelenmiş ve kavramın doğasına uygun öğretim yaklaşımları sınıf bazında ele alınmıştır. Ayrıca, okuyucunun ileri düzey geometri çalışmasına ışık tutacak bazı konular da yine öğretimsel yaklaşımlarla sunulmuştur. Her bölümde belli bir geometri kavramı ilişkili olduğu matematiksel yapılar göz önünde bulundurularak tartışılmış, günlük hayat ve farklı disiplinlerle bağlantısı kurulmuş ve kavramın öğretimine ilişkin somut öneriler verilmiştir. Bu öneriler alanyazının ortaya koyduğu öğrenci zorlukları ve kavram yanılgıları göz önünde bulundurularak yapılmıştır.

Kitabı oluşturan bölümler, geometrinin temel konularından farklı bakış açılarının yansıtıldığı Öklid dışı geometriye kadar birçok alanda çeşitlilik göstermektedir. Kitap içeriğimiz bölümler bazında şu şekilde özetlenebilir.

Editörlerce hazırlanan kitabın ilk bölümünde, Ball, Thames ve Phelps'in (2008) matematik öğretim bilgisi için sundukları model baz alınarak, bir matematik öğretmeninin sahip olması gereken geometri bilgi kategorilerinin bir çerçevesi tanıtılmış ve ardından derin ve sağlam geometri bilgisi için ölçütler üzerinde durulmuştur.

Kitabın **Farklı Kültürlerde Geometri** başlıklı 2. bölümde geometri öğretiminde geometri tarihinin önemi ortaya konmuştur. *Nurgül DÜZENLİ GÖKALP* bu bölümde, genel geometri tarihinden bahsederken, geometri öğretiminin de tarihsel çerçevede değişimini ve gelişimini ele almıştır. Öğretmen, öğretmen adayı ve matematik eğitimcilerinin genel bir perspektife sahip olmasını sağlayacak olan yazar, matematik tarihinin öğretim süreçlerinde kullanılmasının bilimsel olarak etkilerinin incelendiği araştırmalara da yer vermiştir.

Öklid Geometrisinin İnşası ve Öğretimi başlıklı 3. bölümde *Nazan SEZEN YÜKSEL*, geometri öğretiminde Öklid'in çalışmalarının önemini anlatmıştır. Bu bölümde yazar, tarihsel perspektiften Öklid geometrisini ortaya koyarak, geometri öğretiminin Öklid tarafından ilk kez ortaya konulan aksiyomatik çerçevede nasıl olması gerektiğini tartışmıştır.

Kitabın **Öklid-Dışı Geometri ve Öğretimi** başlıklı bölümünde *Recai AKKUŞ*, Öklid ile başlayan geometri yolculuğunun Öklid-dışı geometriye nasıl dönüştüğünü tarihsel bir perspektiften sunmuştur. Öklid-dışı geometrilerdeki temel kavramlar matematiksel ve sezgisel olarak ele alınmış ve bu kavramların nasıl öğretilebileceği öğretim programları baz alınarak açıklanmıştır.

Açıların Öğretimi başlıklı bölümde açı kavramının farklı perspektiflerden tanımları incelenmiş ve bu kavramın öğretimine yönelik öneriler sunulmuştur. *Melike YİĞİT KOYUNKAYA* bu bölümde öğretim programlarında açı kavramının farklı öğretim aşamalarında nasıl değişim gösterdiğinin de altını çizmektedir.

Çokgenlerin Öğretimi başlıklı bölümde çokgen kavramı şemsiye bir kavram olarak ele alıp özel çokgenler, dörtgenler ve üçgenlere değinilmiştir. *Fadime ULUSOY* bu bölümde, geometri öğretimi bağlamında teorik yaklaşımları analiz ederek bu yaklaşımların çokgen kavramının öğretiminde kullanılması yönünde öğretimsel öneriler vermiştir.

Çemberin Öğretimi başlıklı 7. bölümde çemberin elemanları ve özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde yazarlar *Ayşenur YILMAZ* ve *Merve KOŞTUR*, alanyazından da destekleyici bilimsel çalışma sonuçlarından yola çıkarak daire ve çember kavramlarının öğretimi ile ilgili etkinlik önerileri sunmuştur.

Katı Cisimlerin Öğretimi adlı bölümde, katı cisimler matematiksel olarak ele alınmış ve Kepler, Arşimed ve Platonik cisimler gibi farklı cisimler tanıtılmıştır. Bu tanıtımların üzerine *Özge GÜN* bu bölümde öğretimsel öneriler ve etkinlik örnekleri sunmuştur.

Uzunluk, Alan ve Hacim Ölçme Öğretimi bölümünde, kavramların matematiksel yapısı tarihsel gelişimleriyle birlikte incelenmiş ve bu süreçte ölçmenin birim ve kesir kavramları ile ilişkisine değinilmesi amaçlanmıştır. Ayrıca *Dilşad GÜVEN-AKDENİZ* ölçmeye ait karakteristikler ve öğretim programı çerçevesinde öğretime yönelik öneriler ve örnek işlenişler vermiştir.

Analitik Geometrinin Öğretimi başlığında öğretim programlarında analitik geometrinin yeri, tarihsel açıdan gelişimi ve öğretimsel önerileri sunulmuştur. Bu bölümde *Meryem ÖZTURAN SAĞIRLI* öğretmen ve öğretmen adayı okuyuculara öğretimsel açıdan farklı perspektifler sunmaktadır.

Eşlik ve Benzerlik Öğretimi adlı bölümde eşlik ve benzerlik kavramlarının hem Öklid hem de dönüşüm geometrisi açısından tanımlarına ve günlük yaşam ile matematiksel tanımları arasındaki farklılık ve benzerliklerine vurgu yapılarak karşılaştırmalı bir inceleme ortaya konmuştur. Sonrasında yazarlarımız *Zülbiye TOLUK UÇAR* ve *Elif Nur AKKAŞ* öğretmen ve öğretmen adaylarına bu kavramları öğretme sürecinde işe yarayabilecek öneriler sunmuş ve farklı öğretimsel işlenişler vermişlerdir.

Trigonometrinin Öğretimi başlıklı bölüm, trigonometrinin tarihsel gelişimi ve kavramların tanımlanması ile başlanmış, farklı günlük yaşam uygulamalarında trigonometrinin yeri ve önemi, nasıl kullanıldığı gibi açıklamalarla devam etmiştir. Bunun ardından *Emine Gaye ÇONTAY* öğretim programlarında trigonometriye bakış açısı ortaya koymuş ve öğretimsel öneriler ve farklı ders işlenişleri sunmuştur.

Geometrik dönüşümlerin her birinin matematiksel olarak tanımlandığı ve günlük yaşam örnekleri ile açıklandığı **Dönüşüm Geometrisi ve Simetrinin Öğretimi** başlıklı bölümümüzde *Elçin EMRE AKDOĞAN* ve *Fatma Nur GÜRBÜZ*, sadece izometrik simetrilerden değil daralma ve genişleme gibi farklı dönüşüm yapılarını da incelemişlerdir. Bu bölümde ayrıca, öğretimsel süreçte öğretmen ve öğretmen adaylarına yardımcı olabilecek materyaller ve ders işlenişleri de tanıtılmıştır.

Kitabın **Perspektif Öğretimi** adlı bölümünde perspektif kavramını sanat ve matematik alanlarında tarihsel gelişimini inceleyen yazarlarımız *Burçak BOZ-YAMAN* ve *Salih BOZ*, perspektif ve projektif geometriyi açıklayarak perspektifin öğretilmesine yönelik etkinlik örneklerine de yer vermişlerdir.

Fraktal Geometrinin Öğretimi başlıklı bölümde yazarımız *Zuhal ÜNAN*, fraktal yapıyı tanıtarak fraktalın tarihsel gelişimini incelemiştir. Ardından öğrenci zorluklarını vererek giderilmesine yönelik önerilerde bulunan yazarımız, öğrencilerin ilkokuldan üniversiteye bu yapıyı öğrenebilmesi için öğretimsel yaklaşımlar sunmuşlardır.

Süslemelerin Öğretimi: Şerit Süslemeler ve Kaplamalar isimli son bölümde tarihsel ve sanatsal zenginlikler göz önünde bulundurularak, şerit süslemeler ve düzlem kaplamaların düzlemde dönüşümler, izometriler ve simetriler bağlamında matematiksel incelenmesi yapılmıştır. Matematiksel incelemede mümkün olduğunca matematiksel dilin de öne çıkarılması hedefleyen yazarlarımız *Ercan ALTINIŞIK*, *Semanur KANDİL*, *Fatma Derya YAVUZ*, *Recai AKKUŞ* ve *Safure BULUT*, şerit süsleme ve kaplamaların sadece görsel yönünü değil aynı zamanda matematiksel yönünü de vurgulamışlardır. Bölümün diğer kısmında ise, şerit süslemelerin ve kaplamaların öğretimine yönelik yaklaşımlar, ilkokul, ortaokul ve lise düzeyinde örnek teşkil edecek etkinlik önerileri ile birlikte ele alınmıştır.

Ülkemizde matematik eğitimine ve öğretmen yetiştirmeye katkıda bulunmak amacıyla yola çıktığımız bu kitabın bölümlerinin yazılmasında sorumluluk alan, özen ve çaba gösteren tüm yazarlara teşekkür ederiz. Detaylı ve yoğun okumalar, çalışmalar ve düzeltmelerle dolu, bir taraftan da eğlenceli ve öğretici bu uzun serüvende bize sabırla eşlik etmeniz bize güç kattı. Bunun yanında şu an kitabı elinde tutan ve geometrinin daha iyi öğrenilmesi için çabalayan meslektaşlarımıza, matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarına, matematik eğitimcilerine, geometri öğrenme ve öğretme serüvenlerinde bu kitabı rehber edindikleri için teşekkür ederiz. Özellikle kitabın tamamlanma sürecindeki titiz çalışmaları için Pegem Akademik Yayıncılık yönetici ve teknik personeline teşekkür ederiz. Tüm bu süreçte sabırla bize destek olan ailelerimize ise minnet ve teşekkürlerimizi sunarız.

Kitabımızın, geometri öğrenme ve öğretimi konularında bilgi sahibi olmak isteyen ve sınıf içi uygulama örnekleri görmek isteyen herkese; tüm geometri sevenlere, öğretmenlere ve öğretmen adaylarına katkı sağlamasını diliyoruz.

Editör Grubu

BÖLÜMLER VE YAZARLARI

Editörler: Zülbiye TOLUK UÇAR - Recai AKKUŞ - Burçak BOZ YAMAN
Asuman DUATEPE PAKSU - Safure BULUT

1. Bölüm: Geometri Öğretim Bilgisine Giriş

Asuman DUATEPE PAKSU - Pamukkale Üniversitesi
ORCID No: 0000-0003-2504-6294
Zülbiye TOLUK UÇAR - Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-9737-6607
Recai AKKUŞ - Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-6044-4293
Burçak BOZ YAMAN - Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-0922-3652
Safure BULUT - Orta Doğu Teknik Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-5941-1790

2. Bölüm: Farklı Kültürlerde Geometri

Nurgül DÜZENLİ GÖKALP - Kütahya Dumlupınar Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-8585-0554

3. Bölüm: Öklid Geometrisinin İnşası ve Öğretimi

Nazan SEZEN YÜKSEL - Hacettepe Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-0539-3785

4. Bölüm: Öklid-Dışı Geometri ve Öğretimi

Recai AKKUŞ - Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-6044-4293

5. Bölüm: Açıların Öğretimi

Melike YİĞİT KOYUNKAYA - Dokuz Eylül Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-7872-3917

6. Bölüm: Çokgenlerin Öğretimi

Fadime ULUSOY - Kastamonu Üniversitesi
ORCID No: 0000-0003-3393-8778

7. Bölüm: Çemberin Öğretimi

Ayşenur YILMAZ - Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-5291-059X
Merve KOŞTUR-Başkent Üniversitesi
ORCID No: 0000-0003-0736-6155

8. Bölüm: Katı Cisimlerin Öğretimi

Özge GÜN - Bartın Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-6431-3354

9. Bölüm: Uzunluk, Alan ve Hacim Ölçme Öğretimi

Dilşad GÜVEN AKDENİZ - Bayburt Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-7387- 5770

10. Bölüm: Analitik Geometrinin Öğretimi

Meryem ÖZTURAN SAĞIRLI - Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-5359-3421

11. Bölüm: Eşlik ve Benzerlik Öğretimi

Zülbiye TOLUK UÇAR - Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-9737-6607
Elif Nur AKKAŞ - Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-8286-8203

12. Bölüm: Trigonometrinin Öğretimi

Emine Gaye ÇONTAY - Pamukkale Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-6446-9217

13. Bölüm: Dönüşüm Geometrisi ve Simetrinin Öğretimi Öğretimi

Elçin EMRE-AKDOĞAN - TED Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-6521-9287
Fatma Nur GÜRBÜZ - TED Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-1685-3011

14. Bölüm: Fraktal Geometri Öğretimi

Zuhal ÜNAN - Ondokuz Mayıs Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-6835-8760

15. Bölüm: Perspektif Öğretimi

Burçak BOZ-YAMAN - Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-0922-3652
Salih BOZ - Emekli Makine Ustası
ORCID No: 0000-0001-6634-0014

16. Bölüm: Süslemelerin Öğretimi: Şerit Süslemeler ve Kaplamalar

Ercan ALTINIŞIK - Gazi Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-0476-9429
Semanur KANDİL - Bartın Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-7591-4980
Fatma Derya YAVUZ - Hasan Ali Yücel Ortaokulu
ORCID No: 0000-0001-6101-640X
Recai AKKUŞ - Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi
ORCID No: 0000-0001-6044-4293
Safure BULUT - Orta Doğu Teknik Üniversitesi
ORCID No: 0000-0002-5941-1790

İÇİNDEKİLER

Ön Söz iii

1. BÖLÜM
GEOMETRİ ÖĞRETİM BİLGİSİNE GİRİŞ

1.1. Giriş 1
1.2. Geometri Eğitiminde Güncel Eğilimler 3
1.3. Öğretimsel Yaklaşım 6
1.4. Geometri Öğretim Bilgisi 5
Kaynakça 9

2. BÖLÜM
FARKLI KÜLTÜRLERDE GEOMETRİ

2.1. Giriş 11
2.2. Babil Geometrisi 12
2.3. Mısır Geometrisi 13
2.4. Hint Geometrisi 14
2.5. Çin Geometrisi 16
2.6. Yunan Geometrisi 18
2.7. İslam Geometrisi 23
2.8. Matematik Öğretimi ve Matematik Tarihi İlişkisi 27
2.9. Sonuç 29
Kaynakça 29

3. BÖLÜM
ÖKLİD GEOMETRİSİNİN İNŞASI VE ÖĞRETİMİ

3.1. Giriş 31
3.2. Öklid Geometrisi ve Öklid'in "Elemanlar" Adlı Eseri 32
3.3. Öklid Geometrisinin Doğuşu 34
3.4. Öklid Geometrisinin Öğretimi 52
3.5. Sonuç 59
Kaynakça 59

4. BÖLÜM
ÖKLİD-DIŞI GEOMETRİ VE ÖĞRETİMİ

4.1. Genel Giriş 61
4.2. Öklid'in Elemanları ve Temel Kavramlar 63
4.3. Öklid'in 5. Postulatına Tarihsel Yolculuk 65
4.4. Öklid-Dışı Geometrilere Geçiş 70
4.5. Farklı Öklid-Dışı Geometriler ve Öklid Geometrisi ile Karşılaştırmaları 79
4.6. Öklid-Dışı Geometrilerin Öğretimi 87
4.7. Sonuç 93
Kaynakça 94

5. BÖLÜM
AÇILARIN ÖĞRETİMİ

5.1. Giriş 99
5.2. Açı Kavramının Tarihçesi 99
5.3. Açı Kavramının Matematiksel İncelemesi 100
5.4. Açı Kavramını Öğrenme ve Bu Süreçte Yaşanan Zorluklar 110
5.5. Açı Kavramının Öğretimi 118
5.6. Sonuç 130
Kaynakça 130

6. BÖLÜM
ÇOKGENLERİN ÖĞRETİMİ

6.1. Giriş 133
6.2. Çokgenlerin Matematik Tarihindeki Yeri 133
6.3. Çokgenler ve Özellikleri 135
6.4. Özel Çokgenler: Üçgenler 142
6.5. Özel Çokgenler: Dörtgenler 152
6.6. Çokgenlerle İlgili Öğrenci Zorlukları, Kavram Yanılgıları ve Nedenleri 156
6.7. Çokgenlerin Öğretimi 162
6.8. Sonuç 177
Kaynakça 178

7. BÖLÜM
ÇEMBERİN ÖĞRETİMİ

7.1. Giriş 181
7.2. Tarihçe 181
7.3. Çember 187
7.4. Çember Kavramı ile İlgili Karşılaşılan Zorluklar 202
7.5. Çemberin Öğretimi 206
7.6. Sonuç 219
Kaynakça 219

8. BÖLÜM
KATI CİSİMLERİN ÖĞRETİMİ

8.1. Giriş 223
8.2. Katı Cisimlerin Tarihçesi 223
8.3. Katı Cisimler 226
8.4. Katı Cisimlerin Öğretimi 240
8.5. Sonuç 256
Kaynakça 257

9. BÖLÜM
UZUNLUK, ALAN VE HACİM ÖLÇME ÖĞRETİMİ

9.1. Giriş ... 259
9.2. Ölçmenin Tarihi ... 259
9.3. Uzunluk, Alan ve Hacim Ölçme ... 261
9.4. Uzunluk, Alan ve Hacim Ölçme ile İlgili Zorluklar ... 271
9.5. Kavramların Öğretimi: Ölçmeye Ait Karakteristikler ve Etkinlik Örnekleri ... 274
Kaynakça ... 292

10. BÖLÜM
ANALİTİK GEOMETRİNİN ÖĞRETİMİ

10.1. Giriş ... 297
10.2. Analitik Geometrinin Tarihi Yolculuğu ... 297
10.3. Analitik Geometri ... 300
10.4. Konu ile İlgili Zorluklar ... 324
10.5. Konunun Öğretimi ... 325
10.6. Sonuç ... 331
Kaynakça ... 332

11. BÖLÜM
EŞLİK VE BENZERLİK ÖĞRETİMİ

11.1. Giriş ... 335
11.2. Tarihçe ... 335
11.3. Eşlik ve Benzerlik ... 336
11.4. Eşlik ve Benzerlik ile İlgili Araştırmalar ... 365
11.5. Eşlik ve Benzerlik Kavramlarının Öğretimi ... 367
11.6. Sonuç ... 373
Kaynakça ... 374

12. BÖLÜM
TRİGONOMETRİNİN ÖĞRETİMİ

12.1. Giriş ... 377
12.2. İlgili Araştırmalar ... 402
12.3. Trigonometrinin Öğretimi ... 406
12.4. Sonuç ... 415
Kaynakça ... 415

13. BÖLÜM
DÖNÜŞÜM GEOMETRİSİ VE SİMETRİNİN ÖĞRETİMİ

13.1. Giriş 419
13.2. Tarihçe 419
13.3. Dönüşüm Geometrisi ve Simetrinin Matematiksel İncelenmesi 420
13.4. Dönüşüm Geometrisi ve Simetri ile ilgili Zorluklar 434
13.5. Dönüşüm Geometrisi ve Simetrinin Kavramının Öğretimi 436
13.6. Etkinlik Örnekleri için Öğretim Yaklaşımları 437
13.7. Sonuç 444
Kaynakça 445

14. BÖLÜM
FRAKTAL GEOMETRİ ÖĞRETİMİ

14.1. Fraktal Geometriye Giriş 449
14.2. Fraktal Geometrinin Tarihçesi 449
14.3. Fraktal Nedir 451
14.4. Fraktalların Sınıflandırılması 453
14.5. Fraktalların Genel Özellikleri 457
14.6. Kaos Oyunu 464
14.7. Fraktal geometri öğretimi 465
14.8. Sonuç 480
Kaynakça 480

15. BÖLÜM
PERSPEKTİF ÖĞRETİMİ

15.1. Giriş 483
15.2. Perspektifin Tanımı ve Çeşitleri 483
15.3. Matematik Dünyasında Perspektifin Tarihçesi 484
15.4. Perspektifin Öğretimi 497
15.5. Sonuç 518
Kaynakça 518

16. BÖLÜM
SÜSLEMELERİN ÖĞRETİMİ: ŞERİT SÜSLEMELER VE KAPLAMALAR

16.1. Giriş 521
16.2. Düzlemde Dönüşümler, İzometriler ve Simetriler 522
16.3. Şerit Süsleme Örüntüleri ve Grupları (Frieze Patterns and Frieze Groups) 530
16.4. Düzlem Kaplama Örüntüleri ve Grupları (Wallpaper Patterns and Groups) 534
16.5. Matematik Eğitiminde Kaplamalar 549
16.6. Şerit Süslemelerde ve Kaplamalarda Öğretim Yaklaşımı 551
16.7. Sonuç 557
Kaynakça 557

1. BÖLÜM

GEOMETRİ ÖĞRETİM BİLGİSİNE GİRİŞ

Asuman DUATEPE PAKSU-*Pamukkale Üniversitesi*

Zülbiye TOLUK UÇAR-*Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi*

Recai AKKUŞ-*Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi*

Burçak BOZ YAMAN-*Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi*

Safure BULUT-*Orta Doğu Teknik Üniversitesi*

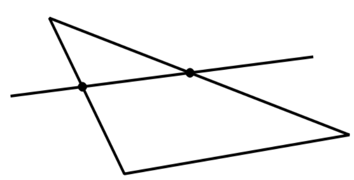
1.1. Giriş

Geometri, görselliği ve güçlü soyutlamaları, somut sezgileri ve genel teorileri ve tarihsel bakış açılarını ve güncel uygulamaları birleştiren bir yapıya sahiptir. Geometrinin gücü, farklı kültürlerden beslenen eşsiz mirasın zamansal bir serüvenle modern matematiği içinde barındırmasında yatar. Playfair (1804) geometrinin gerçeklerinin, birbiri ile ilişkili olan bağlantılar olduğunu ve bu bağlantılar, var oldukları yerlerde, kesin bir şekilde kurulmadan bu gerçekler sisteminin doğru bir şekilde açıklanamayacağını ifade etmektedir. Geometrinin günümüze kadar olan kilometre taşlarında birçok matematikçi rol almıştır. Şüphesiz ki bunların başında, eski uygarlıkların (örn. Mısırlılar, Babiller, Sümerler) bıraktığı kültürel mirası (matematik ve geometri alanında yapılan tüm çalışmalar dahil) sistematik bir yaklaşımla bir araya getiren Yunan matematikçi Öklid (M.Ö. 330-M.Ö. 275) bulunmaktadır. Eski Yunanda, bilinen önerme ve tanımlardan yeni sonuçlar ortaya koyma ve bu sonuçları analiz edip sonrasında ispatlama çok yaygın bir gelenekti (Sibley, 1998). Geometriye kazandırılan aksiyomatik bakış açısı, işte bu geleneğin içinde yetişmiş olan Öklid'in sistematik çalışmaları üzerine kurulu tümdengelimsel bir üründür. Öklid'in kendisinden önceki bilgileri geometri bağlamında genişleterek sunduğu 13 ciltlik Elemanlar kitabı geometri, oranlar ve sayılar kuramını içermektedir. İçinde barındırdığı şüphelere ve eksikliklere rağmen Öklid'in Elemanlar kitabı, uzun yıllar matematikçilerin başucu kaynağı olmasının yanı sıra okul matematiğinin de vazgeçilmezi olmuştur.

Öklid geometrisine ilk eleştirilerden biri belli geometrik yapılara ilişkin sunduğu tanımlarla ilgilidir. Öklid sezgisel olarak ele alınabilecek veya belirsiz olan terimleri tanımlamayı tercih etmiştir. Örneğin, *"nokta"yı büyüklüğü olmayan*, *"çizgi"yi eni olmayan uzunluk* ve *"doğru"yu üzerindeki noktalara göre eşit olarak yatan çizgi* olarak tanımlamıştır. Özünde Öklid geometrisi için temel teşkil eden bu terimleri tanımlamanın "iyi bir yolu" yoktur (Klein, 1939; Sibley, 1998). Dolayısıyla matematikçiler bu belirsizliği ortadan kaldırmak için bazı terimlerin *tanımsız* olarak verilmesi gerektiğini vurgulamışlardır. Çünkü diğer türlü, birbirini tanımlamak için kullanılan kısır bir tanım döngüsüne girilmektedir. Bu ise, başlangıç noktasını belirleme konusunda, doğal olarak, tanımsız terimlerin kabul edilmesi gerekliliğini göstermektedir (Sibley, 1998). Böylesi bir kabulde, aynı tanımsız terimleri kullanan kişilerin birbirini nasıl anlayacakları hususu gündeme gelebilir. O zaman, matematiksel aksiyomatik sistem bize bu tanımsız terimlerin sistem içerisinde nasıl davrandıkları konusunda yardımcı olacaktır. Çünkü *aksiyomlar* aynı zamanda terimlerin nasıl kullanıldıklarını ve birbirleriyle olan ilişkilerini tarif eden *fonksiyonel tanımlar*dır. Dolayısıyla, aksiyomatik sistem içerisinde aksiyomları ve postulatları, mutlak gerçeklik olarak görmek yerine, geometrideki (ve matematikteki) temel ilişkileri formüle etmemize yarayan araçlar bütünü olarak düşünmemiz gerekmektedir. Aslında çalıştığımız uzaydaki yapıların özelliklerini ortaya koymak için dikkatlice seçtiğimiz (belirlediğimiz) ifadelerdir. Klein (1939, s. 186-187) temel kavramlar ve aksiyomların "dolaysız algı olguları (gerçekleri) değil, bu olguların (gerçekliklerin) uygun bir şekilde seçilmiş idealleştirmeleri" olduğunu ifade etmektedir. Örneğin, nokta olgusu anlık algılarımızın bir ürünü değil uzayın tek bir noktaya büzülmesini zihinsel canlandırmayla oluşturduğumuz kurgusal limitidir. Bu ise bize, aksiyomatik sistemin gerçek durumların özgüllüğünden (specificity) ve kesinliğinden (accuracy) bağımsız çalıştığını göstermektedir. Mesela, gerçekte paralel doğruların olup olmadığını düşünmeksizin, projektif geometride paralel çizgileri ufukta kesişen doğrular olarak alabiliriz. Özetle, "aksiyomlar kendi başlarına doğru olmazlar; doğru veya yanlış olmalarına karar vermek için onlara anlam verebileceğimiz bir bağlama ihtiyaç vardır" (Sibley, 1998, s. 29).

Öklid'in çalışmalarına getirilen başka bir eleştiri ise, ispat yaparken kullandığı bazı ifadelerin ya da öncüllerin açıklanmamış olmasıdır. Örneğin, Öklid verilen bir doğru parçası üzerine eşkenar üçgen inşa ederken çemberlerin kesişmesi durumunu incelememiş veya diğer varsayımları kullanarak göstermemiştir. Dolayısıyla, modern matematikçiler bu eksikliği "iki çember postulatı" ile tamamlamışlardır. Diğer taraftan, Öklid'in aksiyomları, postulatları ve bazı ispatları incelendiğinde, çoğunlukla nesnelerin (şekillerin) hareket ettirilerek (üst üste getirme/superposition) gerekçelendirildiği dikkat çekmektedir. Mesela, dördüncü postulat (*bütün dik açılar eşittir*), doğru tanımı (*üzerindeki noktalara göre eşit olarak yatan çizgi*) veya çeşitli problem durumları (örn. *verilen bir doğru parçasını başka bir doğru parçası üzerinde çizme*) gibi yapılar Öklid'in *hareket* fikrini ispatlarında sıklıkla kullandığı anlamına gelmektedir (Klein, 1939). Klein Öklid'in hareket fikrini ispatlarında bu kadar sıklıkla kullanmasına rağmen, bunun hakkında bahsetmemiş olmasını Öklid'in çalışmalarındaki belirsizliklerden biri olarak nitelendirmiştir. Bunlara ek olarak, Öklid *arada olma* (betweenness) durumunu da incelememiştir. Arada olma aksiyomu ile ilgili ilk önemli inceleme 1882'de Pasch tarafından yapılmıştır. "Eğer bir doğru üçgenin bir kenarını keserse diğer iki kenarından birini de keser" (Şekil 1.1).

Yukarıda belirtilen eleştirilerle birlikte 19.yy'ın sonlarında ve 20.yy'ın başlarında geometrinin doğası hakkında yeni görüşler ve gelişmeler ortaya çıkmaya başlamıştır. Bu gelişmeleri kronolojik bir sıra gözetmeksizin iki grupta toplayabiliriz. Birinci grup, Öklid (düzlem) geometrisinin eksikliklerini tamamlamaya yönelik çalışmaları kapsamaktadır. Bu gelişmelerin birçoğu Felix Klein (1849-1925) ve David Hilbert'in (1862-1943) yaptığı çalışmalar üzerine kuruludur (Jones, 2000a; Sibley, 1998). Klein geometriyi "*verilen belirli bir grup dönüşüm altında [bir uzayın] değişmez kalan özelliklerinin çalışması*" olarak tanımlamaktadır (Fish, 1996, s. 92). Diğer bir ifadeyle, herhangi bir geometri (Öklid geometrisi olmak zorunda değil) bir grup dönüşüm ile karakterize edilebilir. Ayrıca, geometrinin tanımları ve teoremleri, sade bir şekilde, bir dizi eylem altında değişmeyen özellikler, değişmeyen ilişkiler ya da *değişmezler*dir (Yian ve Leng, 1984). Dolayısıyla, bu tanımla birlikte geometrinin en genel ve soyut hali olan topolojiden Öklid geometrisine kadar birçok geometriyi sınıflandırmak mümkün olabilmiştir (Jones, 2000a). David Hilbert ve diğer matematikçilerin titiz çalışmaları sonucunda Öklid (düzlem) geometrisindeki eksiklikler ve belirsizlikler giderilmiştir. Hilbert, aslında, Öklid'ten farklı olarak, postulatlar ve aksiyomlar arasındaki ayrımı kaldırmış ve geometri yapma sürecine, temel kavramlar yerine nesneler ve bağıntılar dizgesiyle başlamıştır (Güven, 2020). Daha önce de ifade edildiği gibi Öklid'in tanımlarını verdiği birçok terim, tanımsız olarak alınarak Hilbert'in aksiyomları sayesinde bütün teoremlerin açık ve net bir şekilde ispatlanmasının yolu açılmış oldu. Diğer taraftan Hilbert, Pasch'dan etkilenerek, geometride kanıtların şekiller yoluyla değil mantıksal çıkarımlar yoluyla yapılması gerektiğini savunmaktadır (Güven, 2020). Hilbert'in aksiyomları tanımsız terimlerle başlamaktadır. *Nokta* (point), *doğru* (line) ve bir noktanın bir doğru *üzerinde* (on) olması; doğrusal üç nokta için *arada olma* (betweenness) durumu ve doğru parçası, açılar ve üçgenler için *eşlik* (congruence) tanımsızdır. Aksiyomlar ise beş grup altında toplanabilir: (I) Konum (Bağlantı) aksiyomları, (II) sıralama aksiyomları, (III) eşlik aksiyomları, (IV) paralellik aksiyomları ve (V) süreklilik aksiyomları. Hilbert'in ilk üç gruptaki aksiyomları temel özelliklere yoğunlaşmaktadır. Örneğin, konum aksiyomlarından üçüncüsü (I-3) geometride en az üç nokta olmasını garantilemektedir. Benzer şekilde sıralama aksiyomları bir doğru üzerinde arada olmanın temel özelliklerini vermektedir. Mesela, II-4, Şekil 1.1'de gösterilen Pasch aksiyomudur ve aynı zamanda ayırma aksiyomu olarak da bilinmektedir (Bir *m* doğrusu kendi üzerinde olmayan noktaları iki gruba/kümeye ayırır. Eğer *X* ve *Y* noktaları aynı gruba ait ise *XY* doğrusu *m* doğrusunu kesmez, eğer *X* ve *Y* noktaları farklı gruptalarsa *XY* doğrusu *m* doğrusunu keser) (Sibley, 1998). Dolayısıyla, Hilbert'e göre aksiyomların tutarlılığı kanıtlarla mümkündür ve kanıtlar ise aksiyomatik düşünmenin yani "bilinçle düşünmenin" bir ürünüdür (Güven, 2020). Özetle, bu tartışmalar altında, geometri aksiyomatik yapısını "şimdilik" tamamlamıştır.



Şekil 1.1. Pasch (arada olma/ayırma) aksiyomu

İkinci grup gelişme ise, Öklid'in beşinci postulatını ispatlama girişimleriyle başlayan ve yeni geometrilerin ortaya çıkmasına yol açan çalışmaları kapsamaktadır. Bu gruptaki çalışmalara ayrıntılı bir şekilde 4. Bölüm'de yer verilmiştir. Öklid-dışı geometrilerin Öklid geometrisi kadar geçerli olduğuna ikna eden şey, Öklid geometrisinin alt grupları olarak kabul edilen Lobachevsky geometrisinin değişik modellerinin kullanılmasıdır. Bir geometrideki herhangi bir çelişki bir diğerinde de çelişkiye yol açacaktır. Bu durum Gödel'in 1931'de ortaya attığı "*metateorem*[1]" ve "*eksiklik teoremleri* (incompleteness theorems)[2]" ile şu şekilde

[1] Metateorem: *Bir aksiyomatik sistem, ancak ve ancak bir modele sahip ise, tutarlıdır.*

Bir aksiyomatik sistemin *modeli*, bütün aksiyomların, o aksiyomatik sistemdeki tanımsız terimlerin yorumlandığı küme içerisinde doğru olduğu nesneler grubudur.

[2] *Bütün matematik için tutarlı ve tam olan bir aksiyomatik sistem bulmak imkansızdır*. Örn.: Doğal sayılar aritmetiğindeki bütün gerçeklikleri ispatlayabilecek teoremlere sahip tutarlı bir aksiyomatik sistem bulunamaz. Ve *bir sistem kendi kendinin geçerliliğini ve tutarlılığını kanıtlayamaz*. Örn.: Öklid'in 5.postulatı olmadan Öklid geometrisi eksiktir, çünkü bu postulatı diğer aksiyom ve postulatları kullanarak ispatlamak imkansızdır.

açıklanabilir: Eğer karmaşık bir sistemi açıklamak istiyorsak, Gödel'in eksiklik teoremleri gereği o sistemin tam tutarlılığını ortaya koyamayacağımıza göre, başka bir sistem üzerinden "*bağıl tutarlı* (relative consistent)" olduğunu söyleyebiliriz. Bu ise bize, karmaşık bir geometriyi anlamlandırmak için bir başkasını kullanma imkanı sunmaktadır. Örneğin, analitik geometri Öklid geometrisinin "bağıl tutarlı" olduğunu göstermektedir çünkü analitik geometri reel sayı sistemi üzerine kuruludur (Sibley, 1998). Öklid'ten sonraki Yunan matematikçilerin, İslam matematikçileri Cevherî, Sabit ibn Kurra, Ömer Hayyâm, ve Nasıreddîn Tûsî'nin ve Avrupalı matematikçiler Lambert ve Sacchari'nin Öklid'in "doğruluğunu kanıtlama" çabaları başarısız olmuştur. Çünkü, 5. Postulat olmadan Öklid geometrisi "*eksik*"tir (incomplete). Öklid yaklaşık 2200 yıl önce "paralellik postulatını" postulat olarak alma kararında tamamıyla doğrudur. Gauss (1777-1855), Lobachecsky (1792-1856), Bolyai (1802-1860), Beltrami (1835-1900) ve Poincarè'nin (1854-1912) çalışmaları ile birlikte Öklid'in tamamen doğru olduğu açık bir şekilde kanıtlanmıştır. Lobachevsky'nin Öklid'in paralellik postulatına sunduğu alternatifler Öklid'inki kadar geçerli yeni geometrilerin ortaya çıkmasına imkan verdiği için paralellik postulatını teorem olarak ispatlamak imkansızdır (Bonola, 1912, s. 177; Katz, 2004, s.485). Kline'a (1972) göre, Öklid-dışı geometrilerin keşfi, matematikçilerin yeni bakış açıları geliştirmek için kendilerinden önceki meslektaşlarının çalışmaları üzerine nasıl kurduklarını gösteren en canlı örneğidir. İşte bundan dolayıdır ki, birbirinden bağımsız olarak çalışan birçok matematikçi bu tür bakış açılarının oluşmasına öncülük etmiştir.

1.2. Geometri Eğitiminde Güncel Eğilimler

Öklid Geometrisi yaklaşık 2000 yıl boyunca matematik dünyasında sorgulanmadan tek geometri olarak kabul edilmiştir. Öklid'in Elemanları da, uzun yıllar hem matematikçilerin başucu kaynağı olmuş hem de okul matematiğinin vazgeçilmez bir parçası olmuştur. Öyle ki, Elemanlardaki önermelerin en temel/basitten gittikçe zorlaşan/karmaşıklaşan sırası tarih boyunca geometri öğretiminin araç ve amaçlarına rehberlik etmiştir (Barbin ve Menghini, 2014). Elemanların sunduğu *basitlik düzeni (order of simplicity)* okuyucuda Sertöz'ün (2018) deyimiyle "bilgiyi keşfetme veya yeni bir şey öğrenme heyecanı" uyandırmakla kalmamış aynı zamanda da başlangıçta az sayıda tanım ve aksiyomlardan yola çıkarak yeni önermeler elde etme ve kanıtlamaya dayalı tümdengelimsel düşünmeyi de en güzel şekilde örneklendirmiştir. Bu yönleriyle Öklid Geometrisi, geometri öğretimi için hem içerik belirlemede hem de öğrenenler açısından kolaylık sağlamıştır. Bu nedenle de Orta Çağ Avrupa üniversitelerinde ve sonrasında Elemanların ilk dört kitabı ders kitabı olarak kullanılmıştır.

Geometri öğretimindeki Öklid tarzı gelenek, 19. yüzyıla damgasını vuran David Hilbert ve Felix Klein'ın geometride yarattığı heyecana rağmen devam etmiştir. Günümüzde de dünya genelinde okul geometri öğretim programlarının Öklid geometrisi etrafında şekillendirilmesi geleneği devam etmektedir. Bu iki matematikçinin ülkesi olan Almanya'da bile, geometrinin okul matematiğindeki merkezi konumuna karşın, Öklid tarzı geometri öğretiminin benimsendiği görülmektedir (Mammana ve Villani, 1998). Okul geometrisinin içeriğinin Öklid geometrisi temelinde şekillendirmenin yanı sıra, 20. yüzyılda okullarda geometri öğretimi 1960'lara kadar genelde lisede yer alırken, ancak 1960'lardan itibaren ilkokul öğretim programlarına bir konu olarak dahil edilmiştir (Sinclair ve Bruce, 2015). Bu dönemde ise, lisedeki Öklid tarzı geometri öğretimine hazırlık amacıyla ilkokul ve ortaokulda temelde iki boyutlu şekillerin ele alınmasına odaklanılmış, üç boyutlu geometriye gereken önem verilmemiştir. Dolayısıyla, geometride yaşanan ilerlemelerin okul matematik programlarına kolayca yansımadığına ve alışılagelmiş uygulamaların kolayca değişmediğine tanıklık etmekteyiz. Geometrinin Öklid'in zamanından günümüze geçirmiş olduğu devasa büyümeye rağmen, okullarda halen 2300 yıllık Öklid geometrisinin baskın paradigma olması nasıl açıklanabilir?

Jones (2000a) geçmişten günümüze dünyadaki geometri öğretim programlarına dair tartışmalardan yola çıkarak *uygun bir geometri öğretim programının* ne olduğu sorusunun matematik eğitiminin en uzun soluklu ikilemi olduğunu ileri sürmüştür. Jones matematik öğretim programlarında geometriye ayrılan yerin daralmasının 1960'ların *Yeni Matematik* (New Math) hareketiyle başladığını ve 2000'ler civarında ilginin istatistik ve bazı ülkelerde aritmetiğe kaymasıyla devam ettiğini vurgulamıştır. Bu gelişmelerin öğretim programlarında dikkati geometriden uzaklaştırdığını ve yerini azalttığını ileri süren Jones, tam da bunun aksi yönünde 19. yüzyıldan başlayarak geometri bilgimizin çok hızlı büyüdüğüne, dolayısıyla da 50'den fazla geometriye sahip olduğumuza dikkat çekmektedir. Geometrinin matematik öğretim programlarındaki yerine ilişkin kaygılar Uluslararası Matematik Öğretimi Komisyonu (ICMI) tarafından da ortaya koyulmuştur. ICMI'nın geometri öğretimi ve geometrinin okul matematiğindeki rolü hakkında oluşturulan çalışma grubunun raporu, matematikçi ve matematik eğitimcilerinin geometri öğretimine erken yaşlarda başlanması ve bütün matematik öğretimi programlarının bir parçası olarak devam etmesi gerektiği konusunda hem fikir olduklarını fakat yöntem, amaç ve içerik konusunda ciddi fikir ayrılıklarının olduğunu gözler önüne sermiştir (Mammana ve Villani, 1998).