Matematiksel Akıl Yürütme ile İspat Süreçleri

Editör: Prof. Dr. Salim Yüce

2. Baskı

PEGEM AKADEMİ

Editör: Prof. Dr. Salim Yüce

MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME İLE İSPAT SÜREÇLERİ

ISBN 978-625-6890-05-3

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere http://pegem.net adresinden ulaşılabilmektedir.

1. Baskı: Mayıs 2023, Ankara
2. Baskı: Kasım 2023, Ankara

Yayın-Proje: Begüm Buse Gül
Dizgi-Grafik Tasarım: Pegem Akademi
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Ön Söz

Problem çözme sürecinde matematiksel kavramları, teknikleri ve yöntemleri dolaylı ya da doğrudan kullanmak olarak ifade edilmekte olan matematiksel düşünme, üst düzey düşünme becerilerini gerektirmektedir. Dünyaca ünlü Macar matematikçi ve matematik eğitimcisi George Polya'ya göre matematiksel düşünmeyi belirlemek için yapılması gerekenlerden biri de matematikçilerin teoremleri nasıl ispatladıklarını anlamaya çalışmaktır.

İspatlar; matematiksel bilginin formülleştirilmesi, sonuçların sistematikleştirilmesine katkıda bulunmakta ve sadece bir ifadenin doğruluğunu göstermekle kalmamakta, aynı zamanda öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasına, matematiksel anlayışlarının gelişimine de yardımcı olmaktadır. Bu bağlamda genel olarak soyut, ezberlenmesi ve uygulanması gereken bir takım formüller ve işlemler yığını, sadece okullarda öğretilen bir dersten ibaret olduğu gibi yanlış kanılara sahip olunan matematiğin, bu yanlış anlamalardan kurtarılmasında öğrencilerin matematikçilerin yaptıkları ispatları ve ne anlama geldiklerini bilmelerini önem taşımakta bu noktada öğretmenlere de görev düşmektedir. Öğretmenlerin, öğrencilerine ispatın değişik tipleriyle karşılaşabilecekleri elverişli bir öğrenme ortamı sağlamaları, matematiksel düşünmenin önemini vurgulamaları gerekmektedir. Öğretmenlerin ispata yönelik anlayışları öğrencilerin ispat yapma becerilerini etkilemekte, öğretmenlerin ispata yönelik anlamaları sınırlı olduğunda öğrencilerinin ispat konusunda kavram yanılgılarına sahip olma olasılığını da artırmaktadırlar.

Danışmanlığını yaptığım ve lisans öğrencilerimize, araştırma yapma becerileri kazandırma, akademik çalışmalara hazırlamayı amaçlayan TÜBİTAK 2209-A projesinden elde edilen sonuçları içeren bu kitap. MEB Ortaöğretim Matematik Öğretim Programında yer alan tüm öğrenme alanları, alt öğrenme alanları ve konularda yer alan formüllerin ispatlarını ortaöğretim (9-12. sınıf) düzey öğrencileri seviyesinde ele almaktadır.

Çok değerli iki hocam Nihat Eryılmaz (Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü emekli Öğretim Görevlisi) ve Şükrü Adıgüzel'in (Tokat Gazi Osman Paşa Lisesi emekli Matematik Öğretmeni) mesleki tecrübeleri ile danışmanlığını yürüttükleri bu eserin, ortaöğretim öğrencilerine, matematik öğretmenlerine ve tüm matematik severlere yararlı bir kaynak olacağı umut ve kanaatini taşımaktayım.

En derin saygılarımla.

Prof. Dr. Salim Yüce

Yıldız Teknik Üniversitesi
sayuce@yildiz.edu.tr

İçindekiler

BÖLÜM 1
MATEMATİK

BÖLÜM 2
Geometri

1. MATEMATİK

1.1 SAYILAR

1.1.1 Sayı Kümeleri

1.1.1.1 Rasyonel Sayılar Kümesi

Teorem 1.1 Devirli ondalık sayının, Rasyonel Sayı karşılığı

$$\frac{\textit{virgülü yok sayıp sayının tamamı} - \textit{virgülü yok sayıp devretmeyen kısım}}{\textit{devreden basamak sayısı kadar 9 ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar 0}}$$

ile bulunur.

İspat. $y \in \mathbb{R}$ ve x bir rakam olmak üzere
$y = 0,\bar{x}$ devirli ondalık sayısının Rasyonel Sayı karşılığı $10y = x,\bar{x}$ olmak üzere

$$10y - y = x,\bar{x} - 0,\bar{x} \quad \text{veya} \quad 9y = x \quad \text{veya} \quad y = \frac{x}{9}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade genelleştirilirse;
$X \in \mathbb{R}$ ve A_i ler rakam $(1 \le i \le n)$ olmak üzere

$$X = A_1A_2\ldots A_r,A_{r+1}\ldots A_k\overline{A_{k+1}\ldots A_n}$$

devirli ondalık sayısının Rasyonel Sayı karşılığını bulmak için öncelikle devreden sayı virgülden sonra yalnız bırakılırsa yani sayının her iki yanı 10^{n-r} ile çarpılırsa

$$10^{n-r}X = A_1A_2\ldots A_rA_{r+1}\ldots A_kA_{k+1}\ldots A_n,\overline{A_{k+1}\ldots A_n}$$

elde edilir. Ayrıca X sayısının devretmeyen kısmı virgülün soluna alınırsa yani 10^{k-r} ile çarpılırsa

$$10^{k-r}X = A_1A_2\ldots A_rA_{r+1}\ldots A_k,\overline{A_{k+1}\ldots A_n}$$

elde edilir. Böylece devirden kurtulmak için elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$10^{n-r}X - 10^{k-r}X = (A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k\ldots A_n) - (A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k)$$

veya

$$(10^{n-r} - 10^{k-r})X = (A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k\ldots A_n) - (A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k) \tag{1.1}$$

elde edilir. Böylece X sayısının Rasyonel Sayı karşılığı

$$X = \frac{(A_1A_2\ldots A_n) - (A_1A_2\ldots A_k)}{10^{n-r} - 10^{k-r}} \tag{1.2}$$

şeklinde elde edilir. (1.2) eşitliğinin payda kısmı düzenlenirse

$$10^{n-r} = 1\underbrace{00\ldots0}_{(n-r)\,\text{adet}} \quad \text{ve} \quad 10^{k-r} = 1\underbrace{00\ldots0}_{(k-r)\,\text{adet}}$$

olmak üzere

$$10^{n-r} - 10^{k-r} = \underbrace{999\ldots9}_{(n-k)\,\text{adet}}\underbrace{000\ldots0}_{(k-r)\,\text{adet}}$$

bulunur. Böylece (1.1) eşitliği

$$\frac{\textit{virgülü yok sayıp sayının tamamı} - \textit{virgülü yok sayıp devretmeyen kısım}}{\textit{devreden basamak sayısı kadar 9 ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar 0}}$$

şeklinde yazılabilir. □

Teorem 1.2 Devirli ondalık sayının, Rasyonel Sayı karşılığı

$$\frac{(\textit{devreden basamak sayısı kadar } 9)\cdot(\textit{virgülü yok sayıp devretmeyen kısım})+\textit{devreden kısım}}{\textit{devreden basamak sayısı kadar } 9 \textit{ ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar } 0}$$

ile bulunur.

İspat. $y \in \mathbb{R}$ ve x_i ler rakam $(1 \le i \le 5)$ olmak üzere $y = x_1x_2,x_3\overline{x_4x_5}$ devirli ondalık sayısının Rasyonel Sayı karşılığı:

$$1000y = x_1x_2x_3x_4x_5,\overline{x_4x_5} \quad \text{ve} \quad 10y = x_1x_2x_3,\overline{x_4x_5} \quad \text{için}$$
$$1000y - 10y = 990y = x_1x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3$$

yazılabilir. Buradan

$$990y = x_1x_2x_300 + x_4x_5 - x_1x_2x_3 \quad \text{veya} \quad 990y = (100-1)x_1x_2x_3 + x_4x_5$$

olmak üzere

$$990y = 99x_1x_2x_3 + x_4x_5 \quad \text{veya} \quad y = \frac{99x_1x_2x_3 + x_4x_5}{990}$$

bulunur.
Bu ifadeyi genelleştirelim: $X \in \mathbb{R}$ ve A_i ler rakam $(1 \le i \le n)$ olmak üzere

$$X = A_1A_2\ldots A_r,A_{r+1}\ldots A_k\overline{A_{k+1}\ldots A_n}$$

devirli ondalık sayısı için (1.1) eşitliğini

$$(10^{n-r} - 10^{k-r})X = (A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k\ldots A_n) - (A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k)$$

tekrar ele alalım. Burada farklı bir düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}(10^{n-r} - 10^{k-r})X &= (A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k\underbrace{00\ldots0}_{(n-k)\,\text{adet}}) + (A_{k+1}\ldots A_n) - (A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k)\\ &= 10^{n-k}(A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k) + (A_{k+1}\ldots A_n) - (A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k)\\ &= (10^{n-k}-1)(A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k) + (A_{k+1}\ldots A_n)\\ &= \underbrace{99\ldots9}_{(n-k)\,\text{adet}}(A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k) + (A_{k+1}\ldots A_n)\end{aligned}$$

elde edilir.Böylece X sayısının Rasyonel Sayı karşılığı

$$X = \frac{(\underbrace{99\ldots9}_{(n-k)\,\text{adet}}(A_1A_2\ldots A_r\ldots A_k) + (A_{k+1}\ldots A_n)}{10^{n-r} - 10^{k-r}} \tag{1.3}$$

şeklinde elde edilir. (1.3) eşitliğinin payda kısmı düzenlenirse

$$10^{n-r} - 10^{k-r} = \underbrace{999\ldots9}_{(n-k)\,\text{adet}}\underbrace{000\ldots0}_{(k-r)\,\text{adet}}$$

bulunur. Böylece (1.3) eşitliği

$$\frac{(\textit{devreden basamak sayısı kadar } 9)\cdot(\textit{virgülü yok sayıp devretmeyen kısım})+\textit{devreden kısım}}{\textit{devreden basamak sayısı kadar } 9 \textit{ ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar } 0}$$

şeklinde ifade edilebilir. □

1.1.1.2 İrrasyonel Sayılar Kümesi

Teorem 1.3 $\sqrt{2}$ sayısı bir rasyonel sayı değildir, irrasyonel sayıdır.

İspat. $\mathbb{Q} = \left\{ {}^{a}\!/\!{}_{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0 \right\}$ rasyonel sayılar kümesi olmak üzere $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğunu göstereceğiz: $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, eğer $\sqrt{2}$ sayısı a/b şeklinde yazılabilir ise $\sqrt{2}$ sayısı bir rasyonel sayıdır, aksi taktirde $\sqrt{2}$ sayısı bir rasyonel sayı değildir. Bu, olmayana ergi yöntemiyle ispatlanabilir.[1] $\sqrt{2}$ sayısının bir rasyonel sayı olduğu varsayalım. Bu durumda $ebob(a, b) = 1$ olmak üzere $a/b = \sqrt{2}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ sayıları vardır. $a/b = \sqrt{2}$ eşitliğinde her iki tarafın karesi alınır ise $(a/b)^2 = (\sqrt{2})^2$ veya $a^2/b^2 = 2$ ve

$$a^2 = 2b^2 \tag{1.4}$$

elde edilir. (1.4) eşitliğinin sağ tarafındaki $2b^2$ sayısı bir çift sayı olduğundan eşitliğin sol tarafındaki a^2 sayısı da çift sayıdır Yani a sayısı bir çift sayıdır. O zaman $a = 2c$ olacak şekilde $\exists c \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. (1.4) eşitliğinde a yerine $2c$ yazılır ise $(2c)^2 = 2b^2$ veya $4c^2 = 2b^2$ olmak üzere

$$2c^2 = b^2 \tag{1.5}$$

elde edilir. (1.5) eşitliğinin sol tarafındaki $2c^2$ sayısının bir çift sayı olduğu açıktır. Bu durumda eşitliğin sağ tarafındaki b^2 sayısı da çift sayıdır Yani b sayısı bir çift sayıdır. $ebob(a, b) = 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $a/b = \sqrt{2}$ olacak şekilde a ve b tamsayıları bulunmaz. Yani $\sqrt{2}$ sayısı bir Rasyonel Sayı olmayıp bir İrrasyonel Sayıdır. □

1.1.1.3 Taban Aritmetiği

Teorem 1.4 A_i ler rakam $(-m \leq i \leq n)$ olmak üzere $a \in \mathbb{Z}^+$ tabanındaki $X = (A_n \ldots A_1 A_0, A_{-1} A_{-2} \ldots A_{-m})_a$ ondalık sayısının onluk tabandaki eşiti

$$X = a^{-m} A_{-m} + \cdots + a^{-2} A_{-2} + a^{-1} A_{-1} + a^0 A_0 + a^1 A_1 + \cdots + a^n A_n$$

şeklindedir.

Teorem 1.5 **(Bölme Algoritması)** $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b > 0$ olmak üzere, $a = qb + r$ ve $0 \leq r < b$ olacak şekilde tek türlü belirlenen $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradaki q tamsayısı bölüm, r tamsayısı kalan ve a ile b verildiğinde q ve r sayılarını bulmaya da *kalanlı bölme* denir. Bu bölme işlemi algoritma üzerinde aşağıdaki gibi de ifade elde edilir:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ - & \\ \hline r & \end{array}$$

olmak üzere $a = qb + r$ bağıntısı geçerlidir.

[1] Olmayana ergi yöntemi kısaca bir hipotezin yanlış olduğu varsayımında bulunarak bunun sonucunda ortaya çıkacak çelişkiler ışığında hipotezin doğru olduğunu göstermek için kullanılan bir ispat yöntemidir.

İspat. $S = \{a - xb : x \in \mathbb{Z}, a - xb \geq 0\}$ kümesi için $S \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. $b \geq 1$ olduğundan $|a|b \geq ab$ ve $x = -|a|$ için $a - xb = a - (-|a|)b = a + |a|b \geq 0$ yazılabilir. Böylece $ax - b \in S \neq \emptyset$ bulunur. İyi sıralılık prensibi gereğince S de bir en küçük eleman vardır. [2] Bu en küçük eleman r olsun. S nin tanımından $r = a - qb \geq 0$ olacak şekilde b sayısı mevcuttur. Buradan $a = qb + r$ olacak şekilde q ve r sayılarının var olduğu görülür.

Şimdi $r < b$ olduğunu gösterelim. Eğer $r \geq b$ kabul edilir ise $0 \leq r - b = (a - qb) - b = a - (q+1)b$ yazılabilir. Bu ise $r - b = a - (q+1)b$ anlamına gelir. Buradan $r - b < r$ bulunur. Bu ise r nin b den küçük olması ile çelişir. O halde $r < b$ olmalıdır.

Şimdi q ve r nin tekliğini göstermek için $a = qb + r = q'b + r'$, $0 \leq r < b$ ve $0 \leq r' < b$ olduğu kabul edilsin. O halde $r - r' = (q' - q)b$ ve böylece $|r - r'| = |(q' - q)b| = |q' - q|b$ yazılabilir. Ayrıca $-b < -r' \leq 0$ olduğundan $-b < r - r' < b$ yazılır. Yani $|r - r'| < b$ elde edilir. Devam edilirse $|r - r'| = |q' - q|b < b$ ve $b > 0$ yazılabilir. Buradan $0 \leq |q' - q| < 1$ ve $|q' - q| = 0$ bulunur. Böylece $q' = q$ ve $r' = r$ elde edilir.

Sonuç olarak, $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $a = qb + r$, $0 \leq r < b$ olacak şekilde tek türlü belirlenen $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır.

□

Teorem 1.6 Onluk tabandaki bir sayı herhangi bir tabana çevrilirken sayı o tabana bölünür. Eğer bölüm tabandan büyük ise bu işleme tabandan küçük olana kadar devam edilir. Sonra sırası ile en son bölümden itibaren sondan başa doğru kalan rakamlar yazılır. Yani $k \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, $0 \leq X_j < k$ $(X_m \neq 0)$, A_i ler rakam ve $X_j \in \mathbb{N}$ olmak üzere onluk tabandaki $A_n \ldots A_1 A_0$ sayısı k tabanında

$$(A_n \ldots A_1 A_0)_{10} = X_m \cdot k^m + X_{m-1} \cdot k^{m-1} + \cdots + X_1 \cdot k^1 + X_0 \cdot k^0 = (X_m \ldots X_1 X_0)_k$$

biçiminde yazılabilir.

İspat. $0 \leq i \leq n$ ve A_i ler rakam olmak üzere onluk tabandaki $A_n \ldots A_1 A_0$ sayısının $k \in \mathbb{Z}^+$ tabanında yazılması için k nın kuvvetleri cinsinden ifade edilmesi gerekir. Öyle ise $B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}, X_m \in \mathbb{Z}^+$, $X_0, X_1, \ldots, X_{m-1} < k$ olmak üzere aşağıdaki işlemler uygulanmalıdır:

$$\begin{array}{r|l} A_n \ldots A_1 A_0 & k \\ \cline{2-2} & B_1 \\ - \quad & \\ \hline X_0 \quad & \end{array} \quad \longrightarrow \quad A_n \ldots A_1 A_0 = B_1 \cdot k + X_0 \text{ olsun. Buradan}$$

$$\begin{array}{r|l} B_1 & k \\ \cline{2-2} & B_2 \\ - \quad & \\ \hline X_1 \quad & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} &B_1 = B_2 \cdot k + X_1 \text{ yazılabilir. O halde} \\ &A_n \ldots A_1 A_0 = (B_2 \cdot k + X_1) \cdot k + X_0 \\ &\qquad\qquad\quad = B_2 \cdot k^2 + X_1 \cdot k + X_0 \\ &\text{elde edilir. Buradan} \end{aligned}$$

[2] İyi sıralılık prensibi, doğal sayılar kümesinin boş kümeden farklı herhangi bir alt kümesinin bir en küçük elemanının var olduğunu söyler.

$$\begin{array}{r|l} B_2 & k \\ \cline{2-2} - & B_3 \\ \hline X_2 & \end{array} \longrightarrow$$

$B_2 = B_3 \cdot k + X_2$ yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} A_n \ldots A_1 A_0 &= (B_3 \cdot k + X_2) \cdot k^2 + X_1 \cdot k + X_0 \\ &= B_3 \cdot k^3 + X_2 \cdot k^2 + X_1 \cdot k + X_0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse

$\vdots$

$$\begin{array}{r|l} B_{m-1} & k \\ \cline{2-2} - & X_m \\ \hline X_{m-1} & \end{array} \longrightarrow$$

$B_{m-1} = X_m \cdot k + X_{m-1}$ yazılabilir. Buradan
$(A_n \ldots A_1 A_0) = X_m \cdot k^m + X_{m-1} \cdot k^{m-1} + \cdots + X_1 \cdot k^1 + X_0 \cdot k^0$
bulunur.

O halde $A_n \ldots A_1 A_0$ sayısı k tabanında

$$(A_n \ldots A_1 A_0)_{10} = X_m \cdot k^m + X_{m-1} \cdot k^{m-1} + \cdots + X_1 \cdot k^1 + X_0 \cdot k^0 = (X_m \ldots X_1 X_0)_k$$

şeklinde yazılabilir. □

Teorem 1.7 Taban aritmetiğinde bir sayının çift-tek olması aşağıdaki iki durum ile belirlenir:

- Taban çift ise birler basamağına bakılır; birler basamağı çift ise sayı çifttir, tek ise sayı tektir.
- Taban tek ise rakamları toplamına bakılır; toplam çift ise sayı çifttir, tek ise sayı tektir.

İspat. x tabanındaki abc sayısının tek ya da çift olup olmadığı araştırılırken onluk tabandaki durumu incelenir:

- x çift ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 2k$ alınabilir. O halde

  $$\begin{aligned} (abc)_x &= x^2 \cdot a + x^1 \cdot b + x^0 \cdot c \quad \text{için} \\ &= (2k)^2 \cdot a + (2k)^1 \cdot b + (2k)^0 \cdot c \\ &= 4k^2 a + 2kb + c \\ &= 2(2k^2 a + kb) + c \end{aligned}$$

  elde edilir. Öyleyse $(abc)_x$ nin tekliğini çiftliğini birler basamağındaki c belirler.

  - c çift ise $(abc)_x$ sayısı çifttir.
  - c tek ise $(abc)_x$ sayısı tektir.

- x tek ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 2k+1$ alınabilir. O halde

  $$\begin{aligned} (abc)_x &= (2k+1)^2 \cdot a + (2k+1)^1 \cdot b + (2k+1)^0 \cdot c \\ &= (4k^2 + 4k + 1)a + (2k+1)b + c \\ &= 4k^2 a + 4ka + a + 2kb + b + c \\ &= 2(2k^2 a + 2ka + kb) + a + b + c \end{aligned}$$

  Öyleyse $(abc)_x$ sayısının tekliğini çiftliğini $a + b + c$ (rakamları toplamı) belirler.