

Matematiksel Akıl Yürütme ile İspat Süreçleri

Editör: Prof. Dr. *Salim Yüce*

2. Baskı





Editör: Prof. Dr. *Salim Yüce*

MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME İLE İSPAT SÜREÇLERİ

ISBN 978-625-6890-05-3

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2023, PEGEM AKADEMI

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

1. Baskı: Mayıs 2023, Ankara

2. Baskı: Kasım 2023, Ankara

Yayın-Proje: Begüm Buse Gül

Dizgi-Grafik Tasarım: Pegem Akademi

Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.

İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara

Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: pegem@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Ön Söz

Problem çözme sürecinde matematiksel kavramları, teknikleri ve yöntemleri dolaylı ya da doğrudan kullanmak olarak ifade edilmekte olan matematiksel düşünme, üst düzey düşünme becerilerini gerektirmektedir. Dünyaca ünlü Macar matematikçi ve matematik eğitimcisi George Polya'ya göre matematiksel düşünmeyi belirlemek için yapılması gerekenlerden biri de matematikçilerin teoremleri nasıl ispatladıklarını anlamaya çalışmaktır.

İspatlar; matematiksel bilginin formüle edilmesi, sonuçların sistematikleştirilmesine katkıda bulunmakta ve sadece bir ifadenin doğruluğunu göstermekle kalmamakta, aynı zamanda öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasına, matematiksel anlayışlarının gelişimine de yardımcı olmaktadır. Bu bağlamda genel olarak soyut, ezberlenmesi ve uygulanması gereken bir takım formüller ve işlemler yığını, sadece okullarda öğretilen bir dersten ibaret olduğu gibi yanlış kanılara sahip olunan matematiğin, bu yanlış anlamalardan kurtarılmasında öğrencilerin matematikçilerin yaptıkları ispatları ve ne anlama geldiklerini bilmelerini önem taşımakta bu noktada öğretmenlere de görev düşmektedir. Öğretmenlerin, öğrencilerine ispatın değişik tipleriyle karşılaşabilecekleri elverişli bir öğrenme ortamı sağlamaları, matematiksel düşünmenin önemini vurgulamaları gerekmektedir. Öğretmenlerin ispata yönelik anlayışları öğrencilerin ispat yapma becerilerini etkilemekte, öğretmenlerin ispata yönelik anlamaları sınırlı olduğunda öğrencilerinin ispat konusunda kavram yanlışlarına sahip olma olasılığını da artırmaktadırlar.

Danışmanlığını yaptığım ve lisans öğrencilerimize, araştırma yapma becerileri kazandırma, akademik çalışmalara hazırlamayı amaçlayan TÜBİTAK 2209-A projesinden elde edilen sonuçları içeren bu kitap. MEB Ortaöğretim Matematik Öğretim Programında yer alan tüm öğrenme alanları, alt öğrenme alanları ve konularda yer alan formüllerin ispatlarını ortaöğretim (9-12. sınıf) düzey öğrencileri seviyesinde ele almaktadır.

Çok değerli iki hocam Nihat Eryılmaz (Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü emekli Öğretim Görevlisi) ve Şükrü Adıgüzel'in (Tokat Gazi Osman Paşa Lisesi emekli Matematik Öğretmeni) mesleki tecrübeleri ile danışmanlığını yürüttükleri bu eserin, ortaöğretim öğrencilerine, matematik öğretmenlerine ve tüm matematik severlere yararlı bir kaynak olacağı umut ve kanaatini taşımaktayım.

En derin saygılarımla.

Prof. Dr. *Salim Yüce*

Yıldız Teknik Üniversitesi
sayuce@yildiz.edu.tr

İçindekiler

BÖLÜM 1 MATEMATİK

1.1	SAYILAR.....	2
1.1.1	Sayı Kümeleri	2
1.1.1.1	Rasyonel Sayılar Kümesi.....	2
1.1.1.2	İrrasyonel Sayılar Kümesi.....	4
1.1.1.3	Taban Aritmetiği.....	4
1.1.2	Bölünebilme Kuralları ve Asal Çarpanlarına Ayırma	8
1.1.2.1	Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları	8
1.1.2.2	m-Basamaklı Sayının n-Basamaklı Sayıya Bölünebilmesi	32
1.1.2.3	Bir Tam Sayının Asal Çarpanları ve Tam Sayı Bölenleri.....	36
1.1.2.4	Tam Sayılarda EBOB ve EKOK.....	40
1.1.3	Köklü İfadeler	43
1.1.4	Problemler.....	44
1.1.4.1	Faiz Problemleri	44
1.1.4.2	Saat Problemleri	45
1.2	SAYMA VE OLASILIK.....	47
1.2.1	Sıralama ve Seçme.....	47
1.2.1.1	Sayma Yöntemleri	47
1.2.1.2	Permütasyon.....	47
1.2.1.3	Dairesel permütasyon.....	50
1.2.1.4	Kombinasyon	51
1.2.1.5	Tekrarlı Permütasyon	52

1.2.1.6	Pascal Üçgeni.....	53
1.2.1.7	Binom Açılımı	54
1.3	FONKSİYONLAR.....	61
1.3.0.1	Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar.....	62
1.4	POLİNOMLAR.....	64
1.4.1	Polinom Kavramı ve Polinomlarda İşlemler	64
1.4.1.1	Polinomlarda İşlemler	64
1.5	İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLER	67
1.5.1	İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler.....	67
1.5.1.1	İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişkiler	67
1.6	DİZİLER.....	70
1.6.1	Diziler	70
1.6.1.1	Gerçek Sayı Dizileri	70
1.6.1.2	Aritmetik ve Geometrik Dizi	70
1.6.2	Bir Dizinin Kısmi Toplamları.....	74
1.6.2.1	Toplam Sembölü.....	74
1.7	TRİGONOMETRİ.....	84
1.7.1	Trigonometrik Fonksiyonlar	84
1.7.2	Kosinüs Teoremi	88
1.7.3	Sinüs Teoremi	88
1.7.4	Toplam-Fark ve İki Kat Açılış Formülleri	90
1.8	LİMİT VE TÜREV.....	95
1.8.1	Belirsizlikler.....	95
1.8.2	Limit ve Süreklilik	96
1.8.2.1	Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Soldan ve Sağdan Limiti.....	96
1.8.2.2	Limit ile İlgili Özellikler	101
1.8.3	Türev	112
1.8.3.1	Türevin Uygulamaları	123
1.9	İNTEGRAL	130
1.9.1	Belirsiz İntegral.....	130
1.9.1.1	Belirsiz İntegralde Değişken Değiştirme Yöntemi.....	134
1.9.2	Belirli İntegral	135
1.9.2.1	Belirli İntegralde Değişken Değiştirme Yöntemi	137

1.9.3	İntegral Uygulamaları	137
1.9.3.1	Alan Hesabı.	137
1.9.3.2	Hacim Hesabı	139

Kaynakça

143

BÖLÜM 2

Geometri

2.1	Üçgenler	148
2.1.1	Üçgenlerde Temel Kavramlar	150
2.1.1.1	Üçgende Açı Özellikleri	150
2.1.1.2	Üçgende Açı Kenar Bağlılıları	162
2.1.2	Üçgenlerde Eşlik ve Benzerlik	169
2.1.2.1	Üçgenlerin Eşliği	169
2.1.2.2	Üçgenlerin Benzerliği	174
2.1.2.3	Üçgenlerde Oran-Orantı	181
2.1.3	Üçgenin Yardımcı Elemanları	190
2.1.3.1	Üçgende Açıortay.	190
2.1.3.2	Üçgende Kenarortay	207
2.1.3.3	Üçgende Yükseklik	221
2.1.3.4	İkizkenar Üçgen ve Eş Kenar Üçgende Yardımcı Elemanlar	225
2.1.4	Dik Üçgen.	236
2.1.5	Üçgende Alan Bağlılıları.	251
2.2	Dörtgenler ve Çokgenler.	257
2.2.1	Çokgenler.	258
2.2.2	Dörtgenler ve Özellikleri	261
2.2.3	Özel Dörtgenler.	272
2.2.3.1	Yamuk	272
2.2.3.2	Paralelkenar	282
2.2.3.3	Eşkenar Dörtgen.	293
2.2.3.4	Dikdörtgen	297
2.2.3.5	Kare	301
2.2.3.6	Deltoid	302

2.3	Çember ve Daire	302
2.3.1	Çemberin Temel Elemanları	303
2.3.1.1	Çemberde Kirişin Özellikleri	303
2.3.1.2	Çemberde Teğetin Özellikleri	309
2.3.2	Çemberde Açılar	318
2.3.3	Bir Noktanın Çembere Göre Kuvveti	328
2.3.4	Dairenin Çevresi ve Alanı	331
2.4	Uzay Geometri	335
2.4.1	Katı Cisimler	335
2.4.1.1	Dik Prizmalar	335
2.4.1.2	Dik Piramitler	339
2.4.1.3	Dik Dairesel Silindir	345
2.4.1.4	Dik Dairesel Koni	347
2.4.1.5	Küre	350
2.5	Analitik Geometri	352
2.5.1	Doğrunun Analitik İncelenmesi	352
2.5.2	Çemberin Analitik İncelenmesi	368
2.5.3	Analitik Düzlemde Temel Dönüşümler	377
2.5.4	Konikler	378
2.5.4.1	Elips	379
2.5.4.2	Hiperbol	382
2.5.4.3	Parabol	384
Kaynakça		387
Dizin		389

1. MATEMATİK

1.1	SAYILAR.....	2
1.2	SAYMA VE OLASILIK.....	47
1.3	FONKSİYONLAR.....	61
1.4	POLİNOMLAR.....	64
1.5	İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER.....	67
1.6	DİZİLER.....	70
1.7	TRİGONOMETRİ.....	84
1.8	LİMİT VE TÜREV.....	95
1.9	İNTEGRAL.....	130

1.1 SAYILAR

1.1.1 Sayı Kümeleri

1.1.1.1 Rasyonel Sayılar Kümesi

Teorem 1.1 Devirli ondalık sayının, Rasyonel Sayı karşılığı

$$\frac{\text{virgülli yok sayı sayısının tamamı} - \text{virgülli yok sayı devretmeyen kısım}}{\text{devreden basamak sayısı kadar 9 ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar 0}}$$
 ile bulunur.

İspat. $y \in \mathbb{R}$ ve x bir rakam olmak üzere

$y = 0, \bar{x}$ devirli ondalık sayısının Rasyonel Sayı karşılığı $10y = x, \bar{x}$ olmak üzere

$$10y - y = x, \bar{x} - 0, \bar{x} \quad \text{veya} \quad 9y = x \quad \text{veya} \quad y = \frac{x}{9}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade genelleştirilirse;

$X \in \mathbb{R}$ ve A_i ler rakam ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere

$$X = A_1 A_2 \dots A_r A_{r+1} \dots A_k \overline{A_{k+1} \dots A_n}$$

devirli ondalık sayısının Rasyonel Sayı karşılığını bulmak için öncelikle devreden sayı virgülden sonra yalnız bırakılırsa yani sayının her iki yanı 10^{n-r} ile çarpılırsa

$$10^{n-r} X = A_1 A_2 \dots A_r A_{r+1} \dots A_k A_{k+1} \dots A_n \overline{A_{k+1} \dots A_n}$$

elde edilir. Ayrıca X sayısının devretmeyen kısmı virgülden soluna alınırsa yani 10^{k-r} ile çarpılırsa

$$10^{k-r} X = A_1 A_2 \dots A_r A_{r+1} \dots A_k \overline{A_{k+1} \dots A_n}$$

elde edilir. Böylece devirden kurtulmak için elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$10^{n-r} X - 10^{k-r} X = (A_1 A_2 \dots A_r \dots A_k \dots A_n) - (A_1 A_2 \dots A_r \dots A_k)$$

veya

$$(10^{n-r} - 10^{k-r}) X = (A_1 A_2 \dots A_r \dots A_k \dots A_n) - (A_1 A_2 \dots A_r \dots A_k) \quad (1.1)$$

elde edilir. Böylece X sayısının Rasyonel Sayı karşılığı

$$X = \frac{(A_1 A_2 \dots A_n) - (A_1 A_2 \dots A_k)}{10^{n-r} - 10^{k-r}} \quad (1.2)$$

şeklinde elde edilir. (1.2) eşitliğinin payda kısmı düzenlenirse

$$10^{n-r} = \underbrace{100 \dots 0}_{(n-r) \text{ adet}} \quad \text{ve} \quad 10^{k-r} = \underbrace{100 \dots 0}_{(k-r) \text{ adet}}$$

olmak üzere

$$10^{n-r} - 10^{k-r} = \underbrace{999 \dots 9}_{(n-k) \text{ adet}} \underbrace{000 \dots 0}_{(k-r) \text{ adet}}$$

bulunur. Böylece (1.1) eşitliği

$$\frac{\text{virgülli yok sayı sayısının tamamı} - \text{virgülli yok sayı devretmeyen kısım}}{\text{devreden basamak sayısı kadar 9 ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar 0}}$$

şeklinde yazılabilir. \square

Teorem 1.2 Devirli ondalık sayının, Rasyonel Sayı karşılığı

$\frac{(\text{devreden basamak sayısı kadar } 9) \cdot (\text{virgüülü yok sayıp devretmeyen kısım}) + \text{devreden kısım}}{\text{devreden basamak sayısı kadar } 9 \text{ ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar } 0}$
ile bulunur.

İspat. $y \in \mathbb{R}$ ve x_i ler rakam ($1 \leq i \leq 5$) olmak üzere $y = x_1x_2x_3\overline{x_4x_5}$ devirli ondalık sayısının Rasyonel Sayı karşılığı:

$$1000y = x_1x_2x_3x_4x_5\overline{x_4x_5} \quad \text{ve} \quad 10y = x_1x_2x_3\overline{x_4x_5} \quad \text{için}$$

$$1000y - 10y = 990y = x_1x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3$$

yazılabilir. Buradan

$$990y = x_1x_2x_300 + x_4x_5 - x_1x_2x_3 \quad \text{veya} \quad 990y = (100 - 1)x_1x_2x_3 + x_4x_5$$

olmak üzere

$$990y = 99x_1x_2x_3 + x_4x_5 \quad \text{veya} \quad y = \frac{99x_1x_2x_3 + x_4x_5}{990}$$

bulunur.

Bu ifadeyi genelleştirelim: $X \in \mathbb{R}$ ve A_i ler rakam ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere

$$X = A_1A_2 \dots A_r, A_{r+1} \dots A_k \overline{A_{k+1} \dots A_n}$$

devirli ondalık sayısı için (1.1) eşitliğini

$$(10^{n-r} - 10^{k-r})X = (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k \dots A_n) - (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k)$$

tekrar ele alalım. Burada farklı bir düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} (10^{n-r} - 10^{k-r})X &= (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k \underbrace{00 \dots 0}_{(n-k)\text{adet}}) + (A_{k+1} \dots A_n) - (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) \\ &= 10^{n-k}(A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) + (A_{k+1} \dots A_n) - (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) \\ &= (10^{n-k} - 1)(A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) + (A_{k+1} \dots A_n) \\ &= \underbrace{99 \dots 9}_{(n-k)\text{adet}} (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) + (A_{k+1} \dots A_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece X sayısının Rasyonel Sayı karşılığı

$$X = \frac{\underbrace{99 \dots 9}_{(n-k)\text{adet}} (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) + (A_{k+1} \dots A_n)}{10^{n-r} - 10^{k-r}} \quad (1.3)$$

şeklinde elde edilir. (1.3) eşitliğinin payda kısmı düzenlenirse

$$10^{n-r} - 10^{k-r} = \underbrace{999 \dots 9}_{(n-k)\text{adet}} \underbrace{0000 \dots 0}_{(k-r)\text{adet}}$$

bulunur. Böylece (1.3) eşitliği

$$\frac{(\text{devreden basamak sayısı kadar } 9) \cdot (\text{virgüülü yok sayıp devretmeyen kısım}) + \text{devreden kısım}}{\text{devreden basamak sayısı kadar } 9 \text{ ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar } 0}$$

şeklinde ifade edilebilir. \square

1.1.1.2 İrrasyonel Sayılar Kümesi

Teorem 1.3 $\sqrt{2}$ sayısı bir rasyonel sayı değildir, irrasyonel sayıdır.

İspat. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ rasyonel sayılar kümesi olmak üzere $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğunu göstereceğiz: $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, eğer $\sqrt{2}$ sayısı $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilir ise $\sqrt{2}$ sayısı bir rasyonel sayıdır, aksi taktirde $\sqrt{2}$ sayısı bir rasyonel sayı değildir. Bu, olmayana ergi yöntemiyle ispatlanabilir.¹ $\sqrt{2}$ sayısının bir rasyonel sayı olduğu varsayalım. Bu durumda $\text{ebob}(a, b) = 1$ olmak üzere $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ sayıları vardır. $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ eşitliğinde her iki tarafın karesi alınır ise $(\frac{a}{b})^2 = (\sqrt{2})^2$ veya $\frac{a^2}{b^2} = 2$ ve

$$a^2 = 2b^2 \quad (1.4)$$

elde edilir. (1.4) eşitliğinin sağ tarafındaki $2b^2$ sayısı bir çift sayı olduğundan eşitliğin sol tarafındaki a^2 sayısı da çift sayıdır Yani a sayısı bir çift sayıdır. O zaman $a = 2c$ olacak şekilde $\exists c \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. (1.4) eşitliğinde a yerine $2c$ yazılır ise $(2c)^2 = 2b^2$ veya $4c^2 = 2b^2$ olmak üzere

$$2c^2 = b^2 \quad (1.5)$$

elde edilir. (1.5) eşitliğinin sol tarafındaki $2c^2$ sayısının bir çift sayı olduğu açıktır. Bu durumda eşitliğin sağ tarafındaki b^2 sayısı da çift sayıdır Yani b sayısı bir çift sayıdır. $\text{ebob}(a, b) = 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ olacak şekilde a ve b tamsayıları bulunmaz. Yani $\sqrt{2}$ sayısı bir Rasyonel Sayı olmayıp bir İrrasyonel Sayıdır. \square

1.1.1.3 Taban Aritmetiği

Teorem 1.4 A_i ler rakam $(-m \leq i \leq n)$ olmak üzere $a \in \mathbb{Z}^+$ tabanındaki $X = (A_n \dots A_1 A_0, A_{-1} A_{-2} \dots A_{-m})_a$ ondalık sayısının onluk tabandaki eşiği

$$X = a^{-m} A_{-m} + \dots + a^{-2} A_{-2} + a^{-1} A_{-1} + a^0 A_0 + a^1 A_1 + \dots + a^n A_n$$

şekindedir.

Teorem 1.5 (Bölme Algoritması) $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b > 0$ olmak üzere, $a = qb + r$ ve $0 \leq r < b$ olacak şekilde tek türlü belirlenen $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradaki q tamsayısı bölüm, r tamsayısı kalan ve a ile b verildiğinde q ve r sayılarını bulmaya da *kalanlı bölme* denir. Bu bölme işlemi algoritma üzerinde aşağıdaki gibi de ifade elde edilir:

$$\begin{array}{r} a \\ \hline b \\ \hline q \\ \hline r \end{array}$$

olmak üzere $a = qb + r$ bağıntısı geçerlidir.

¹ Olmayana ergi yöntemi kısaca bir hipotezin yanlış olduğu varsayımında bulunarak bunun sonucunda ortaya çıkacak çelişkiler ışığında hipotezin doğru olduğunu göstermek için kullanılan bir ispat yöntemidir.

İspat. $S = \{a - xb : x \in \mathbb{Z}, a - xb \geq 0\}$ kümesi için $S \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. $b \geq 1$ olduğundan $|a|b \geq ab$ ve $x = -|a|$ için $a - xb = a - (-|a|)b = a + |a|b \geq 0$ yazılabilir. Böylece $ax - b \in S \neq \emptyset$ bulunur. İyi sıralılık prensibi gereğince S de bir en küçük eleman vardır. ² Bu en küçük eleman r olsun. S nin tanımından $r = a - qb \geq 0$ olacak şekilde b sayısı mevcuttur. Buradan $a = qb + r$ olacak şekilde q ve r sayılarının var olduğu görülür.

Şimdi $r < b$ olduğunu gösterelim. Eğer $r \geq b$ kabul edilir ise $0 \leq r - b = (a - qb) - b = a - (q + 1)b$ yazılabilir. Bu ise $r - b = a - (q + 1)b$ anlamına gelir. Buradan $r - b < r$ bulunur. Bu ise r nin b den küçük olması ile çelişir. O halde $r < b$ olmalıdır.

Şimdi q ve r nin tekliliğini göstermek için $a = qb + r = q'b + r'$, $0 \leq r < b$ ve $0 \leq r' < b$ olduğu kabul edilsin. O halde $r - r' = (q' - q)b$ ve böylece $|r - r'| = |(q' - q)b| = |q' - q|b$ yazılabilir. Ayrıca $-b < -r' \leq 0$ olduğundan $-b < r - r' < b$ yazılır. Yani $|r - r'| < b$ elde edilir. Devam edilirse $|r - r'| = |q' - q|b < b$ ve $b > 0$ yazılabilir. Buradan $0 \leq |q' - q| < 1$ ve $|q' - q| = 0$ bulunur. Böylece $q' = q$ ve $r' = r$ elde edilir.

Sonuç olarak, $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $a = qb + r$, $0 \leq r < b$ olacak şekilde tek türlü belirlenen $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır. □

Teorem 1.6 Onluk tabandaki bir sayı herhangi bir tabana çevrilirken sayı o tabana bölünür. Eğer bölüm tabandan büyük ise bu işleme tabandan küçük olana kadar devam edilir. Sonra sırası ile en son bölümden itibaren sondan başa doğru kalan rakamlar yazılır. Yani $k \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, $0 \leq X_j < k$ ($X_m \neq 0$), A_i ler rakam ve $X_j \in \mathbb{N}$ olmak üzere onluk tabandaki $A_n \dots A_1 A_0$ sayısı k tabanında

$$(A_n \dots A_1 A_0)_{10} = X_m \cdot k^m + X_{m-1} \cdot k^{m-1} + \dots + X_1 \cdot k^1 + X_0 \cdot k^0 = (X_m \dots X_1 X_0)_k$$

biçiminde yazılabilir.

İspat. $0 \leq i \leq n$ ve A_i ler rakam olmak üzere onluk tabandaki $A_n \dots A_1 A_0$ sayısının $k \in \mathbb{Z}^+$ tabanında yazılması için k nın kuvvetleri cinsinden ifade edilmesi gerekir. Öyle ise $B_1, B_2, \dots, B_{m-1}, X_m \in \mathbb{Z}^+$, $X_0, X_1, \dots, X_{m-1} < k$ olmak üzere aşağıdaki işlemler uygulanmalıdır:

$$\begin{array}{r|l} A_n \dots A_1 A_0 & k \\ \hline & B_1 \\ \hline = & X_0 \end{array} \longrightarrow A_n \dots A_1 A_0 = B_1 \cdot k + X_0 \text{ olsun. Buradan}$$

$$\begin{array}{r|l} B_1 & k \\ \hline & B_2 \\ \hline = & X_1 \end{array} \longrightarrow \begin{aligned} B_1 &= B_2 \cdot k + X_1 \text{ yazılabilir. O halde} \\ A_n \dots A_1 A_0 &= (B_2 \cdot k + X_1) \cdot k + X_0 \\ &= B_2 \cdot k^2 + X_1 \cdot k + X_0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

²İyi sıralılık prensibi, doğal sayılar kümesinin boş kümeden farklı herhangi bir alt kümesinin bir en küçük elemanının var olduğunu söyler.

$$\begin{array}{c} B_2 \\ \hline X_2 \end{array} \left| \begin{array}{c} k \\ B_3 \end{array} \right. \longrightarrow B_2 = B_3 \cdot k + X_2 \text{ yazılabilir. O halde} \\ A_n \dots A_1 A_0 = (B_3 \cdot k + X_2) \cdot k^2 + X_1 \cdot k + X_0 \\ = B_3 \cdot k^3 + X_2 \cdot k^2 + X_1 \cdot k + X_0 \\ \text{bulunur. Bu şekilde devam edilirse}$$

⋮

$$\begin{array}{c} B_{m-1} \\ \hline X_{m-1} \end{array} \left| \begin{array}{c} k \\ X_m \end{array} \right. \longrightarrow B_{m-1} = X_m \cdot k + X_{m-1} \text{ yazılabilir. Buradan} \\ (A_n \dots A_1 A_0) = X_m \cdot k^m + X_{m-1} \cdot k^{m-1} + \dots + X_1 \cdot k^1 + X_0 \cdot k^0 \\ \text{bulunur.}$$

O halde $A_n \dots A_1 A_0$ sayısı k tabanında

$$(A_n \dots A_1 A_0)_{10} = X_m \cdot k^m + X_{m-1} \cdot k^{m-1} + \dots + X_1 \cdot k^1 + X_0 \cdot k^0 = (X_m \dots X_1 X_0)_k$$

şeklinde yazılabilir. □

Teorem 1.7 Taban aritmetiğinde bir sayının çift-tek olması aşağıdaki iki durum ile belirlenir:

- Taban çift ise birler basamağına bakılır; birler basamağı çift ise sayı çifttir, tek ise sayı tektir.
- Taban tek ise rakamları toplamına bakılır; toplam çift ise sayı çifttir, tek ise sayı tektir.

İspat. x tabanındaki abc sayısının tek ya da çift olup olmadığı araştırılırken onluk tabandaki durumu incelenir:

- x çift ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 2k$ alınabilir. O halde

$$\begin{aligned} (abc)_x &= x^2 \cdot a + x^1 \cdot b + x^0 \cdot c \quad \text{için} \\ &= (2k)^2 \cdot a + (2k)^1 \cdot b + (2k)^0 \cdot c \\ &= 4k^2 a + 2kb + c \\ &= 2(2k^2 a + kb) + c \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse $(abc)_x$ nin tekliliğini çiftliğini birler basamağındaki c belirler.

- c çift ise $(abc)_x$ sayısı çifttir.
- c tek ise $(abc)_x$ sayısı tektir.

- x tek ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 2k + 1$ alınabilir. O halde

$$\begin{aligned} (abc)_x &= (2k + 1)^2 \cdot a + (2k + 1)^1 \cdot b + (2k + 1)^0 \cdot c \\ &= (4k^2 + 4k + 1)a + (2k + 1)b + c \\ &= 4k^2 a + 4ka + a + 2kb + b + c \\ &= 2(2k^2 a + 2ka + kb) + a + b + c \end{aligned}$$

Öyleyse $(abc)_x$ sayısının tekliliğini çiftliğini $a + b + c$ (rakamları toplamı) belirler.