

KPSS
2024
ÖABT

Bütün kitaplar cepte, tablette, masanda

VIDEO
DESTEKLİ

LİSE MATEMATİK

Arti - Yapay
Zekâ Asistan

Dijital Öğrenme
Ayak İzi

Hibrit Kitap
Teknolojisi

ANALİZ
DİFERANSİYEL DENKLEMLER
KONU ANLATIMLI



Hibrit kitaba erişebilmek
için QR kodu okutunuz.

PEGEM AKADEMİ



Komisyon

ÖABT Lise Matematik Analiz Diferansiyel Denklemler Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6890-83-1

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayinevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten uluslararası akademik bir yayınevidir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan WorldCat ve ayrıca Türkiye'de kurulan Turcademy.com tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere

<http://pegem.net> adresinden ulaşılabilmektedir.

I I. Baskı: Kasım 2023, Ankara

Proje-Yayın: Nilay Balin

Dizgi-Grafik Tasarım: İlnur Öztürk

Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.
No: 141/33, Yenimahalle/Ankara
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖNSÖZ

Değerli Okuyucularımız,

ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz dört kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği 1. Kitap" adlı yayıncımız Analiz ve Diferansiyel Denklemler bölümünü kapsamaktadır ve Kamu Personel Seçme Sınavı (KPSS) Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı pegem@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...



Kitabın baskı tarihinden sonra gerçekleşen değişikliklere aşağıda yer alan kodu okutarak ulaşabilirsiniz.



<https://depo.pegem.net/2024oabt-lisemat-ka-guncelleme.pdf>

TÜRKİYE'DE İLK DEFA TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



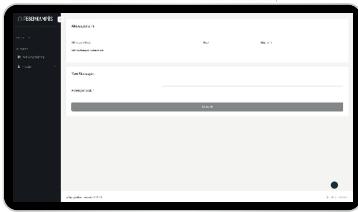
- 1 Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
- 2 Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
- 3 Konu sonu testlerini çözebilir.



Detaylı anlatım için QR kodu okutunuz.

Yapay zekâ, bırakılan etkileşimler sonrasında kullanıcıların başarı durumlarını tespit ederek karşılarına bir analiz ekranı çıkarmaktadır.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden hibrit kitabınıza erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:



1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna arti.pegemkampus.com yazarak web sitemiz üzerinden etkileşimli ve yapay zekâ destekli hibrit kitaba erişim sağlayabilirsiniz.

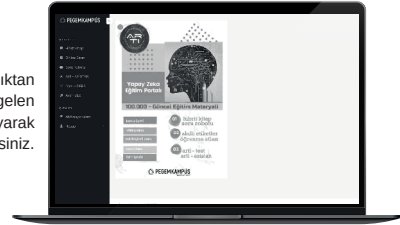


Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "Aktivasyonlarım" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.

2. Adım Aktivasyon

3. Adım Ürünlerim

Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "Hibrit Kitap" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



Aktivasyon kodu kitabınızın ilk sayfasında yer almaktadır.
Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2024 tarihine kadar geçerlidir.



Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

FONKSİYONLAR

FONKSİYON ÇEŞİTLERİ.....	2
Birebir fonksiyon	2
Örten fonksiyon	3
İçine fonksiyon	4
Sabit fonksiyon	4
Tek ve Çift fonksiyon	4
Birim fonksiyon	5
Ters fonksiyon	5
Bileşke fonksiyon	5
Bileşke fonksiyonun Özellikleri.....	5
ALIŞILMIŞ FONKSİYON TÜRLERİ.....	6
Kuvvet fonksiyonları.....	6
Polinom fonksiyonlar.....	6
Rasyonel fonksiyonlar.....	6

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR	7
MUTLAK DEĞER FONKSİYONU	7
MUTLAK DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER VE DENKLEMLER	9
SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONU	11
İŞARET FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ	12
TAM DEĞER VE TAM DEĞER FONKSİYONU	13
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ	13
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN GRAFİKLERİ	16
FONKSİYONLARIN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ.....	17
FONKSİYON GRAFİKLERİNDE ÖTELEMELER	18

LİMİT

LİMİT	24
SAĞ – SOL LİMİT.....	24
GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ	26
LİMİT İLE İLGİLİ TEOREMLER.....	27
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ	28
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN LİMİTİ	29
SİGNUM FONKSİYONUNUN LİMİTİ	30
TAM DEĞER FONKSİYONLARININ LİMİTİ	31
BELİRSİZ DURUMLAR 0/0 BELİRSİZLİĞİ	33
TRİGONOMETRİK 0/0 BELİRSİZLİĞİ	34
∞/∞ BELİRSİZLİĞİ.....	35
$\infty-\infty$ BELİRSİZLİĞİ.....	37
$0 \cdot \infty$ BELİRSİZLİĞİ.....	38
ÜSLÜ, ÜSTEL BELİRSİZLİKLERİN ∞/∞ FORMU	39
SÜREKLİLİK.....	40
SÜREKLİLİK TEOREMLERİ	40
SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ.....	41
Kaldırılabilir Süreksizlik	41
Sıçrama Süreksizliği	41
Sonsuz Süreksizliği.....	41
Balzano Teoremi	41
DÜZGÜN SÜREKLİLİK	43

TÜREV

TÜREV	50
SAĞ-SOL TÜREV.....	51
LİMİT – SÜREKLİLİK – TÜREV İLİŞKİSİ	51
TÜREV ALMA KURALLARI.....	52
YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER.....	66

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ	68
Parçalı Fonksiyonların Türevi	68
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ	69
SİGNUM FONKSİYONUNUN TÜREVİ	70
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ	70
TÜREVİN UYGULAMALARI	80
L'Hospital Kuralı	80
ÜSTEL BELİRSİZLİKLER	83
1^∞ , 0^0 , ∞^0 Belirsizlikleri	83
TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU	85
POLİNOM – TÜREV İLİŞKİSİ	86
DİFERANSİYEL UYGULAMALARI	86
MAKSİMUM – MİNİMUM PROBLEMLERİ	87
Maksimum – Minimum Problemlerinde Kullanılabilecek Kısayollar	90
TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU	94
Teğet – Eğim – Türev İlişkisi	94
ARTAN – AZALAN FONKSİYONLAR	99
YEREL EKSTREMUM DEĞERLER	102
Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum Noktası	103
TÜREV – EKSTREMUM İLİŞKİSİ	103
Grafikte Maksimum ve Minimum Nokta Yorumu	105
TÜREVLENEBİLİR BİR FONKSİYONUN EĞRİLİK YÖNÜ	106
ASİMPTOT KAVRAMI	111
Düşey Asimptot	111
Yatay Asimptot	112
Eğik-Eğri Asimptot	113
FONKSİYONUN GRAFİKLERİ	115
TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER	115

İNTEGRAL

BELİRSİZ İNTEGRAL	131
TEMEL İNTEGRAL ALMA KURALLARI	132
İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ	137
A) Değişken Değiştirme Yöntemi	137
ÖZEL DÖNÜŞÜMLER	140
$\sqrt{a^2 - x^2}$ İfadesini İçeren İntegraller	140
$\sqrt{x^2 - a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller	141
$x^2 + a^2$ ve $\sqrt{x^2 + a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller	141
RASYONEL (KESİRLİ) İFADELERİN İNTEGRALI	142
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALI	146
İndirgeme Bağlantıları	148
B) Kısmi İntegrasyon Yöntemi	148
BELİRLİ İNTEGRAL	154
Riemann İntegrali	154
İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMLERİ	156
Belirli İntegrallerin Özellikleri	156
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALI	161
İNTEGRALDE ALAN	163
İNTEGRALDE HACİM	164
Kabuk Yöntemi	169
Eğri Uzunluğu Hesabı	172
Dönel Yüzeyin Alanı	174
Pappus – Guldin Teoremi	175

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ	178
Seviye Eğrileri	181
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	181
Süreklilik	184
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Türev (Kısmi Türev)	184
Çok Değişkenli Fonksiyonların 2. Türevi	186
Zincir Kuralı	187
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Teğet Düzlem Denklemi	187

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA MAKSİMUM-MİNİMUM	188
Yerel Maksimum	188
Yerel Minimum	188
Kritik Nokta – Eyer Nokta	189
Kritik Nokta İçin 2. Türev Testi	189
Maksimum–Minimum Problemleri	191
Kapalı Fonksiyonun Türevi	191
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA İNTEGRAL	192
Çift Katlı İntegral	192
Sınır Değişirme	194
Bölge Değişirme	195
Dönüşüm Jakobiyeni (Fonksiyonel Determinantı)	195
Kutupsal Koordinatlara Geçiş	195
İki Katlı İntegralin Uygulamaları	197
Alan Hesabı	197
Hacim Hesabı	199
ORTALAMA DEĞER TEOREMİ	201
Kütle Hesabı	202
AĞIRLIK MERKEZİ	202
ÜÇ KATLI İNTEGRALLER	202
KUTUPSAL KOORDİNATLAR	
KUTUPSAL KOORDİNATLAR	208
Kutupsal Koordinatlardaki Denklemi Verilen Eğrinin Çizimi	210
KARDİYOİD EĞRİSİ	210
Gül Eğrilerinin Çizimi	216
Kutupsal Koordinatlarda Alan	221
Kutupsal Koordinatlarda Uzunluk Hesabı	222
DİZİLER – SERİLER	
DİZİ	224
Sonlu Dizi	224
Sabit Dizi	224
EŞİT DİZİLER	225
ALT DİZİ	225
DİZİLERDE DÖRT İŞLEM	226
DİZİLERDE SINIRLILIK	227
DİZİLERDE MONOTONLUK	227
ARİTMETİK VE GEOMETRİK DİZİLER	228
Aritmetik Dizi	228
Geometrik Dizi	229
DİZİLERDE LİMİT	230
Dizilerde Limit ile İlgili Özellikler	232
Dizilerde En Büyük Alt Sınır (Ebas) – En Küçük Üst Sınır (Eküs) Kavramları	233
SERİLER	234
Geometrik Seri	236
Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testleri	239
Genel Terim Testi	239
İntegral Testi	239
p – Testi	240
Karşılaştırma Testi	240
Karşılaştırma Testinin Limit Formu	240
Cauchy – Kök Testi	241
D’alambert Oran Testi	242
Limit Testi	243
Alterne Seriler	243
Mutlak Yakınsaklık – Yakınsaklık İlişkisi	243
KUVVET SERİLERİ	244
Yakınsaklık Yarıçapı	244
Yakınsaklık Aralığında Türevlenebilme ve İntegrasyon	245
Taylor ve Maclaurin Serileri	246
Önemli Maclaurin Seri Açılımları	247
ÇÖZÜMLÜ TESTLER	262

2. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

DİFERANSİYEL DENKLEMLER	367
Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	368
Genel ve Özel Çözümler	369
Varlık ve Teklik Teoremi	370
Bir Eğri Ailesinin Diferansiyel Denkleminin Oluşturulması	371

DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR DENKLEMLER

DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR DENKLEMLER	373
DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR HÂLE GETİRİLEBİLEN DENKLEMLER	375
HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	376
Homojen Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	376
HOMOJEN HÂLE DÖNÜŞTÜRÜLEBİLİR DİFERANSİYEL DENKLEMLER	377
TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER	379
İNTEGRASYON ÇARPANI YARDIMI İLE DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ	381
İntegrasyon Çarpanını Bulma	381
LİNEER DENKLEMLER	383
Lineer Diferansiyel Denklemin Çözüm Yöntemi	383
BERNOULLİ DENKLEMLERİ	385
RİCCATİ DENKLEMİ	386

BİRİNCİ MERTEBEDEN n . DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

BİRİNCİ MERTEBEDEN n . DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	391
Türeve, x 'e veya y 'ye Göre Çözülebilir Denklemler	391
Türeve Göre Çözülebilir Denklemler	391
x 'e Göre Çözülebilir Denklemler	392
y 'ye Göre Çözülebilir Denklemler	392
CLAİRAUT DENKLEMİ	393
LAGRANGE DENKLEMİ	394
İNDİRGENEBİLİR 2. MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	395

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER	397
3. Mertebeden Homojen Olmayan Lineer Denklem	397
Mertebe İndirgeme	398
Sabit Katsayılı Denklemler	399
Farklı Reel Kökler	399
Katlı Reel Kökler	400
Kompleks Kök	400
Homojen Olmayan (2. Yanlı) Lineer Diferansiyel Denklemler	403
Belirsiz Katsayılar Yöntemi	403
PARAMETRELERİN DEĞİŞİM YÖNTEMİ	407
CAUCHY – EULER DENKLEMİ	409
ÇÖZÜMLÜ TESTLER	415

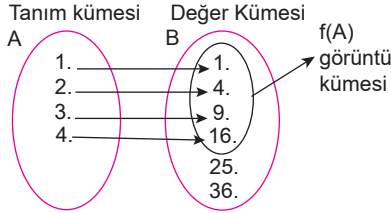
FONKSİYONLAR

A ve B boş olmayan kümeleri için "A'nın" her elemanını "B'nin" bir ve yalnız bir elemanına eşleyen f bağıntısına A'dan B'ye fonksiyon denir.

Ya da;

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ f'ye A'dan B'ye bir fonksiyon denir. Ayrıca bu tanıma fonksiyonun iyi tanımlılığı denir.

f : A \rightarrow B veya $x \rightarrow y = f(x)$ biçiminde gösterilir. Burada x'e bağımsız değişken y'ye x'e bağlı bağımlı değişken denir.



Fonksiyon Kümelerinde İşlemler

f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D fonksiyonları için

$\forall x \in A \cap C$ için

- $f(x) \pm g(x) = (f + g)(x)$
- $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $g(x) \neq 0$

Yani iki fonksiyonda işlem yapılırken iki fonksiyonun tanım kümelerinin kesişimi alınır.

Örnek

A = {1, 2, 3}, B = {2, 4, 5} kümeleri için

f : A \rightarrow R, $y = f(x) = x^2$

g : B \rightarrow R, $y = g(x) = x + 1$

şeklinde tanımlanıyor. Buna göre

A) $(f + g)(x)$

B) $(f \cdot g)(x)$

tanım ve görüntü kümelerini bulalım.

Çözüm

f için {(1, 1), (2, 4), (3, 9)}

$x \rightarrow x^2$

g için {(2, 3), (4, 5), (5, 6)}

$x \rightarrow x + 1$ olur.

Şimdi $(f + g)(x)$ A \cap B = {2} olduğundan

$(f \cdot g)(x)$

$(f + g)(2) = f(2) + g(2)$

= 4 + 3

= 7

Yani {(2, 7)} olur.

$(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2)$

= 4 \cdot 3

= 12 olur.

Yani {(2, 12)} olur.

Örnek

f : [-1, 2] \rightarrow R

$f(x) = x^2 - 2x + 5$

fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

Çözüm

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ kartezyen koordinatlarda parabol belirtir.

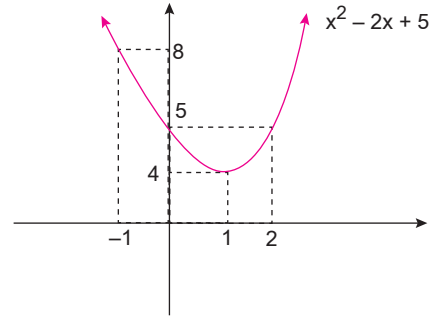
T(r, k) tepe noktası koordinatları olup

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \text{ apsis}$$

$f(r) = k \rightarrow f(1) = 1 - 2 + 5 = \text{ordinat}$

$x = 0$ için $y = 5$ olur.

$x^2 - 2x + 5 = 0$ için $\Delta < 0$ olduğundan denklemin reel kökü yoktur dolayısıyla x eksenini kesmez.



$f(-1) = 1 + 2 + 5 = 8$

$f(2) = 4 - 4 + 5 = 5$

$f(1) = 4$ olduğundan Ç.K = [4, 8] olur.

Ya da;

Bu tarz sorularda uç değerler bulunur.

$f(-1) = 8$

$f(2) = 5$

Sonra tanım kümesi içinde kalan ekstremum noktalar bulunur.

$f'(x) = 2x - 2 = 0$ $x = 1$ olur.

$f(1) = 4$ olur. Görüntü kümesi bulunur.

[4, 8] dir.

Örnek

$$f : (-2, 4) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$$

fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(-2) &= -\frac{8}{2} - 4 + 6 + 1 \\ &= 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{64}{3} - 16 - 12 + 1 \\ &= -27 + \frac{64}{3} \\ &= -\frac{17}{3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3) \cdot (x+1) = 0$$

$x_1 = 3$ $x = -1$ Tanım kümesi aralığında olduğunda

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{3} - 1 - 3 + 1 \\ &= -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Ç. $K = \left[-8, \frac{1}{3} \right]$ olarak bulunur.

FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

Birebir Fonksiyon

$A, B \neq \emptyset$ olmak üzere;

$f : A \rightarrow B$ fonksiyon olsun.

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ için;}$$

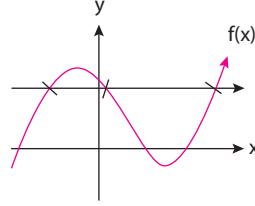
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ oluyorsa f fonksiyonuna birebir fonksiyon denir.

Ayrıca; $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğundan

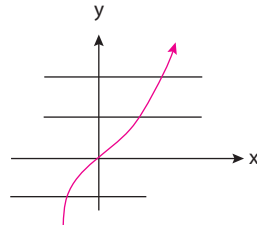
$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ için}$$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ koşulu da fonksiyonun birebirliğini belirtir.

Grafiği verilen fonksiyon birebir olup olmadığı araştırılırken x eksenine paralel doğru çizilir. Paralel doğrular grafiği tek noktada kesiyorsa fonksiyon birebir, birden fazla noktada kesiyorsa birebir değildir.



$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
Birebir değil.



$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
Birebirdir.

Uyarı !

A ve B sonlu iki küme olmak üzere;

$f : A \rightarrow B$ fonksiyon olsun;

- $s(A) > s(B)$ ise f birebir değildir.
- $s(A) = m, s(B) = n$ ve $m \leq n$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$ birebir fonksiyon sayısı $P(m, n)$ 'dir.
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.
- Sabit fonksiyonlar birebir değildir.
- Çift fonksiyonlar birebir değildir.
- Periyodik fonksiyonlar ($\sin x, \cos x$) birebir olmaz.
- Fonksiyonun ekstremum noktası varsa birebir olmaz.
- Bir fonksiyon daima artan ya da daima azalan ise birebirdir.

NOT

KPSS
2024
ÖABT

Bütün kitaplar cepte, tablette, masanda

VIDEO
DESTEKLİ

LİSE MATEMATİK

Arti - Yapay
Zekâ Asistan

Dijital Öğrenme
Ayak İzi

Hibrit Kitap
Teknolojisi

SOYUT CEBİR
LİNEER CEBİR

KONU ANLATIMLI



Hibrit kitaba erişebilmek
için QR kodu okutunuz.

PEGEM AKADEMİ



Komisyon
ÖABT Lise Matematik Soyut Cebir - Lineer Cebir Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6890-83-1

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten uluslararası akademik bir yayınevidir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan WorldCat ve ayrıca Türkiye'de kurulan Turcademy.com tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere

<http://pegem.net> adresinden ulaşılabilmektedir.

11. Baskı: Kasım 2023, Ankara

Proje-Yayın: Nilay Balin

Dizgi-Grafik Tasarım: İlknur Öztürk

Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.
No: 141/33, Yenimahalle/Ankara
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz dört kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği Soyut Cebir - Lineer Cebir 2. Kitap" adlı yayınıımız Soyut Cebir - Lineer Cebir bölümünü kapsamaktadır ve Kamu Personel Seçme Sınavı (KPSS) Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı pegem@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...



Kitabın baskı tarihinden sonra gerçekleşen değişikliklere aşağıda yer alan kodu okutarak ulaşabilirsiniz.



<https://depo.pegem.net/2024oabt-lisemat-ka-guncelleme.pdf>

TÜRKİYE'DE İLK DEFA TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



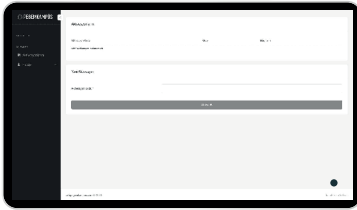
1. Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
2. Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
3. Konu sonu testlerini çözebilir.



Detaylı anlatım için
QR kodu okutunuz.

Yapay zekâ, bırakılan etkileşimler sonrasında kullanıcıların başarı durumlarını tespit ederek karşılarına bir analiz ekranı çıkarmaktadır.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden hibrit kitabınıza erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:



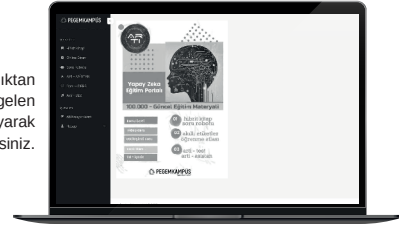
Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna arti.pegemkampus.com yazarak web sitemiz üzerinden etkileşimli ve yapay zekâ destekli hibrit kitaba erişim sağlayabilirsiniz.



Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "Aktivasyonlarım" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "Hibrit Kitap" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



**Aktivasyon kodu kitabınızın ilk sayfasında yer almaktadır.
Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2024 tarihine kadar geçerlidir.**



**Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55**

İÇİNDEKİLER

SOYUT CEBİR

Sayılar ve Özellikleri	1	Simetrik (Permütasyon) ve Alterne Gruplar	25
Rakam	1	Gruplarda Homomorfizm ve İzomorfizm	26
Sayma Sayıları	1	Homomorfizma	26
Doğal Sayılar	1	İzomorfizma	26
Tam Sayılar	1	Bölüm Grupları	29
Aralarında Asalılık	1	Devirli Gruplar	30
Rasyonel Sayılar	1	Devirli Grupların Alt Grupları	31
İrrasyonel Sayılar	1	Üreteç Sayısı	32
Reel Sayılar	1	Çarpım Grupları	32
Tek ve Çift Sayılar	1	İzomorf olmayan Abelyan Gruplar	33
Ardışık Sayılar	2	Halka, Cisim ve Tamlık Bölgesi	33
Negatif ve Pozitif Sayılar ile İlgili Özellikler	2	Alt Halka	35
Tam Sayılarda Bölünebilme	2	Sıfır Bölenler ve Tamlık Bölgesi	35
En Büyük Ortak Bölen	4	Bölüm Halkası	36
En Küçük Ortak Kat	4	İdeal	36
Euler ϕ -Fonksiyonu	7	Nilpotent Eleman	36
ϕ -Fonksiyonunun Bazı Özellikleri	7	Polinom Halkası	36
Kongrüanslar	9	Cisim	37
Tam Sayılar ve Modüler Aritmetik	9	Cebirsel Sayı	37
Gruplar	19	Transandant Sayı	37
Tek İşlemlili Cebirsel Yapı Türleri	19	Sayılabilir Küme	37
Mertebe	21	Çözümlü Test 1	43
Alt Gruplar	22	Çözümlü Test 2	47
Normal Alt Gruplar	24	Çözümlü Test 3	51
		Çözümlü Test 4	55

LİNEER CEBİR

Hatırlatma: İç İşlem.....	59	Alterne ve Çok Lineer Fonksiyonlar.....	115
Dış İşlem.....	59	n-Linear Fonksiyonlar.....	115
Grup.....	59	Bir Lineer Dönüşümün Determinantı ve İzi.....	116
Alt Grup	59	Determinantlarda Alan ve Hacim Hesabı	116
Halka	59	Matrislerin Polinomu	117
Vektör Uzayları	60	Karakteristik Değerler ve Karakteristik	
Alt Vektör Uzayı	62	Vektörler	118
Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık	66	Karakteristik Uzay	119
Taban (Baz).....	67	Karakteristik Polinom ve Karakteristik	
İç Çarpım Uzayları.....	68	Denklemler	120
İç Çarpım.....	68	Çözümlü Test 1.....	127
Norm	70	Çözümlü Test 2.....	132
Ortonormal Baz	75	Çözümlü Test 3.....	136
Direkt Toplam Uzayı	80	Çözümlü Test 4.....	140
İç Çarpım Uzaylarının Alt Uzayları.....	81	Çözümlü Test 5.....	144
Lineer Dönüşümler	83		
Matrisler ve Matris Uzayları	90		
Matris Toplamı	91		
Skaler ile Matris Çarpımı.....	92		
Matris Çarpımı.....	92		
Bir Matrisin Transpozu	93		
Kare Matrisler.....	94		
Bir Matrisin Tersisi.....	94		
Elemanter Operasyonlar (Basit İşlemler).....	104		
Determinantlar	105		
Sarrus Kuralı	106		
Minör ve Kofaktör	108		

SOYUT CEBİR

1. Sayılar ve Özellikleri

Rakam

Sayıları yazmaya yarayan sembollere rakam denir. Kullandığımız onluk sistemdeki rakamların kümesi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dur.

Rakamlarla oluşturulan ifadelere sayı denir.

Sayma Sayıları

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesi sayma sayılar kümesidir.

Doğal Sayılar

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesidir. $N^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ pozitif doğal sayılar kümesini ifade eder.

Tam Sayılar

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesidir.

Tam sayılar kümesi üç ana bölümden oluşur. Negatif tam sayılar (Z^-), pozitif tam sayılar (Z^+) ve $\{0\}$ kümesidir. Ayrıca $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$ dir.

Aralarında Asallık

p ve q sıfırdan farklı iki pozitif tam sayı olsun. p ve q sayılarını ortak olarak bölen en büyük pozitif tam sayı 1 ise p ve q aralarında asaldır denir.

Rasyonel Sayılar

$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \text{ ve } q \text{ aralarında asal, } q \neq 0 \right\}$ kümesidir.

İrrasyonel Sayılar

$I = Q'$ sembolleriyle gösterilir yukarıda tanımlanan $\frac{p}{q}$ tipinde yazılamayan sayılardan oluşur. Yani rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayı denir.

Reel Sayılar

Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşim kümesidir. R ile gösterilir. $R = Q \cup Q'$ dir.

Örnek

$x, y, z \in Z$ olmak üzere,

$$x \cdot y = 12, y \cdot z = 4 \text{ ve } x \cdot z = 3$$

eşitliklerini sağlayan x, y, z sayılarının en büyük toplamı en küçük toplamından kaç fazladır?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm

$$\frac{x \cdot y}{y \cdot z} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{x}{z} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot z \text{ bulunur.}$$

Bu ifade $x \cdot z = 3$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$3z^2 = 3 \Rightarrow z = \mp 1 \text{ bulunur.}$$

$$z = 1 \text{ için } x = 3 \text{ ve } y = 4 \text{ olup } x + y + z = 8$$

$$z = -1 \text{ için } x = -3 \text{ ve } y = -4 \text{ olup } x + y + z = -8 \text{ bulunur.}$$

$8 - (-8) = 16$ dir. Doğru seçenek C olarak elde edilir.

Örnek

$a, b, c \in N$ olmak üzere

$3a + 6b - c = 24$ eşitliğini sağlayan a, b ve c değerleri için $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm

Katsayısı büyük olana büyük değer verilir.

Sayılar aynı olabileceğinden $a = 0 = c$ seçilirse $b = 4$ bulunur.

$$a + b + c = 4 \text{ olur.}$$

Örnek

a ve b doğal sayılardır.

$$56 \cdot a = b^3$$

eşitliğini sağlayan en küçük b değeri kaçtır?

Çözüm

Önce sayı asal çarpanlarına ayrılır.

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

$$56 \cdot a = 2^3 \cdot 7 \cdot a = b^3 \text{ tür.}$$

Buradan $a = 7^2$ seçilirse $b = 2 \cdot 7 = 14$ bulunur.

Tek ve Çift Sayılar

2 ile kalansız bölünebilen tam sayılara çift tam sayı, 2 ile tam bölünemeyen tam sayılara tek tam sayı denir. Çift sayılar $2n$, tek tam sayılar $2n - 1$ ile gösterilir ($n \in Z$).

Tek ve Çift Tam Sayılar İle İlgili Özellikler

- 1) $T \mp T = \text{Ç}$ 5) $\text{Ç} \cdot \text{Ç} = \text{Ç}$
 2) $\text{Ç} \mp \text{Ç} = \text{Ç}$ 6) $T \cdot T = T$
 3) $T \mp \text{Ç} = T$ 7) $n \in N$ olmak üzere $T^n = T$
 4) $T \cdot \text{Ç} = \text{Ç}$ 8) $n \in N^+$ olmak üzere $\text{Ç}^n = \text{Ç}$ dir.

Tek ve çift sayılarda bölme işlemine ait kural tanımlanamaz. Örneğin $60, 40$ ve 2 sayıları çift sayıdır.

$\frac{40}{2} = \text{Ç}$, $\frac{40}{40} = T$, $\frac{40}{60}$ sayısı ne tek ne de çifttir.

NOT!

Ardışık Sayılar

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n, n + 1, n + 2, \dots$ sayılarına ardışık tam sayılar denir.

Kural:

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \text{ dir.}$$

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2n - 1, 2n + 1, 2n + 3, \dots$ sayılarına ardışık tek sayılar denir.

Kural:

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 \text{ dir.}$$

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2n, 2n + 2, 2n + 4, \dots$ sayılarına ardışık çift sayılar denir.

Kural:

$$n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1) \text{ dir.}$$

Kural:

Ardışık terimleri arasındaki artış miktarı eşit olan dizide

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$$

ve

$$\text{Terim Toplamı} = \frac{\text{Terim Sayısı} \cdot (\text{Son terim} + \text{İlk terim})}{2}$$

dir.

Negatif ve Pozitif Sayılar İle İlgili Özellikler

- | | |
|------------------------|--------------------|
| 1) $(-)\cdot(-) = (+)$ | 5) $(-)/(-) = (+)$ |
| 2) $(-)\cdot(+) = (-)$ | 6) $(-)/(+) = (-)$ |
| 3) $(+)\cdot(+) = (+)$ | 7) $(+)/(+) = (+)$ |
| 4) $(+)\cdot(-) = (-)$ | 8) $(+)/(-) = (-)$ |

9) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(-)^{2n} = (+)$ dir.

10) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(-)^{2n-1} = (-)$ dir.

11) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(+)^n = (+)$ dir.

Tam Sayılarda Bölünebilme

$m, n, r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m \cdot n = r$ olsun. Bu durumda m ve n ye r nin bölenleri (çarpanları) r ye de m ve n nin bir katı denir. m, r nin bir böleni ise bu durum $m \mid_r$ ile, aksi takdirde

$m \nmid_r$ ile gösterilir.

2 ile bölünebilme: Çift tam sayılar 2 ile tam bölünür.

3 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları toplamı 3 veya 3 ün katı ise sayı 3 ile tam bölünür.

4 ile bölünebilme: Verilen sayının son iki basamağı (birler ve onlar basamağı) 4 ile tam bölünebiliyor ise verilen sayı 4 ile tam bölünür.

5 ile bölünebilme: Verilen sayının birler basamağı 0 veya 5 ise sayı 5 ile tam bölünür.

7 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları altına sağdan sola doğru sırasıyla 1, 2, 3 sayıları yazılır. Bu rakamlar altlarına yazdığımız sayılar ile çarpılır. Daha sonra sağdan sola üçerli gruplar hâlinde alınıp bu gruplar (+), (-) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 7 veya 7'nin katı ise verilen sayı 7 ile tam bölünür.

8 ile bölünebilme: Verilen sayının son üç basamağı (birler, onlar ve yüzler basamağı) 8 ile bölünebiliyor ise sayı 8'e tam bölünür.

9 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları toplamı 9 veya 9 un katı ise sayı 9 ile tam bölünür.

10 ile bölünebilme: Verilen sayının birler basamağı 0 ise verilen sayı 10 ile tam bölünür.

11 ile bölünebilme: Verilen sayı sağdan sola doğru sırası ile (+), (-) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 11 veya 11 in katı ise verilen sayı 11 ile tam bölünür.

Örnek

Hangi n doğal sayıları için $(n+1) \mid_{(n^2+1)}$ dir.

Çözüm

$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(n+1) \mid_{(n^2-1)} \text{ dir.}$$

$$(n+1) \mid_{(n^2+1)} \text{ ve } (n+1) \mid_{(n^2-1)} \text{ olduğundan}$$

$$n+1 \mid_{[(n^2+1)-(n^2-1)]} \Rightarrow n+1 \mid_2 \text{ olur.}$$

$n \in \mathbb{N}$ olduğundan ve $n + 1 \leq 2$ olması gerektiğinden $n = 0, 1$ elde edilir.

Kural:

$[1, x]$ aralığında n ile bölünebilen doğal sayıların sayısı

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \text{ dir.}$$

Kural:

$a \in \mathbb{Z}$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$n < m \text{ için } a^{2^n+1} \mid_{a^{2^m-1}} \text{ dir.}$$

Kural:

$n \geq 2$ olmak üzere n ve k iki doğal sayı olsun.

$$n-1 \mid_{n^k-1} \text{ dir.}$$

Kural:

n bir doğal sayı ve k bir tek sayı olsun.

$$(1+2+\dots+n) \mid (1^k+2^k+\dots+n^k) \text{ dir.}$$

Kural:

$a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. a sayısı b ile bölündüğünde kalan r ise $2^a - 1$ sayısı $2^b - 1$ ile bölündüğünde kalan $2^r - 1$ dir.

Örnek

$\{1, 2, \dots, 600\}$ dizisinde 13 ile bölünebilen kaç tane doğal sayı vardır?

Çözüm

$$\left\lfloor \frac{600}{13} \right\rfloor = 46 \text{ adettir.}$$

Örnek

1000 den küçük kaç doğal sayı 17 ile bölünür?

Çözüm

$[1, 1000]$ kümesinde

$$\left\lfloor \frac{1000}{17} \right\rfloor = 58 \text{ ve } 0 \in \mathbb{N} \text{ için } 17 \mid 0 \text{ olup toplam } 58 + 1 = 59$$

adet sayı 17 ile tam bölünür.

Örnek

$N = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$ sayısının 41 ile bölünebilmesi için n en az kaç olmalıdır?

Çözüm

$$\begin{aligned} N &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) \\ &= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) \\ &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

sayısının 41 ile bölünebilmesi için $n(n+1)(n+2)$ çarpanlarından en az biri 41 e bölünmelidir.

$$n+2 = 41 \Rightarrow n = 39 \text{ olmalıdır.}$$

Teorem:

m, n ve r tam sayı olmak üzere,

- $\forall m \in \mathbb{Z}$ iken $a \mid 0$ dir.
- $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $\pm 1 \mid m$ ve $\pm m \mid m$ dir.
- $m \mid_{\pm 1} \Leftrightarrow m = \mp 1$ dir.
- $m \mid_n$ ise $\pm m \mid_{\pm n}$ dir.
- $m \mid_n$ ve $n \mid_r$ ise $m \mid_r$ dir.
- $m \mid_n$ ve $n \mid_m$ ise $m = \pm n$ dir.
- $c \neq 0$ olmak üzere $cm \mid_{cn}$ ise $m \mid_n$ dir.
- $m_1 \mid_{n_1}$ ve $m_2 \mid_{n_2}$ ise $m_1 \cdot m_2 \mid_{n_1 \cdot n_2}$ dir.
- $m \mid_n$ ve $m \mid_r$ ise $m \mid_{n+r}$ dir.

Çıkış Sorular

$k \mid_m$ gösterimi k sayısının m sayısını tam bölündüğünü ifade eder.

Buna göre a, b ve c tam sayıları için,

- $c \mid a \cdot b$ ise $c \mid a$ ve $c \mid b$ dir.
- $a \cdot b \mid c$ ise $a \mid c$ ve $b \mid c$ dir.
- $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ dir.

yargılarından hangileri **daima** doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) Yalnız III

Çözüm

c sayısı $a \cdot b$ yi bölüyor ise $c \mid_a$ ve $c \mid_b$ doğru olmayabilir, $6 \mid_{2 \cdot 3}$ tür ama $6 \mid_2$ ve $6 \mid_3$ yanlıştır. II ve III. öncül doğrudur.

Cevap D

Tanım:

(Asal Sayı) : $n > 1$ tam sayısının kendisinden ve birden başka pozitif böleni yoksa n 'ye asal (= prime) sayı denir.

Tanım:

(Bileşik Sayı): Asal olmayan sayılara bileşik (= combined) sayı denir.

Tanım:

Aralarındaki fark iki olan asal sayılara ikiz asallar denir.

Teorem:

Her bileşik sayının en az bir asal çarpanı vardır.

Teorem (Euclid):

Asal sayıların sayısı sonsuzdur.

Bir sayının tüm bölenlerinin sayısı pozitif bölenlerinin sayısının iki katıdır.

Uyarı !

Teorem (Bölme Algoritması):

$m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \neq 0$ ise $m = q \cdot n + r$; $0 < r < |n|$ olacak şekilde bir tek q ve r tam sayı ikilisi vardır.

En Büyük Ortak Bölen:

m ve n tam sayılar olmak üzere $k|m$ ve $k|n$ ise k ye m ve n nin bir ortak böleni denir.

m ve n yi bölen en büyük pozitif d tam sayısına m ve n nin en büyük ortak böleni (=obeb = ebob) denir.

$d = (m, n)$ ile gösterilir.

Uyarı

1) Tanıma göre d 'nin m ve n 'nin obeb'i olması için gerek ve yeter şart

i) $d|m$ ve $d|n$ olması,

ii) $k, k|m$ ve $k|n$ özelliğindeki bir başka ortak bölen iken $k|d$ olmasıdır.

2) İki'den fazla sayının obeb'i de benzer şekilde tanımlanır.

Uyarı

Obeb verilen tam sayıların pozitif lineer toplamlarının en küçüğüdür.

Teorem:

Sıfırdan farklı iki tam sayının obeb'i tektir.

Teorem: $(m, n) = d \Leftrightarrow \left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ 'dir.

Teorem:

$(a, b) = 1$ ve $(a, c) = 1$ ise $(a, b, c) = 1$ 'dir.

Teorem:

$\frac{a}{b} \cdot c$ ve $(a, b) = 1$ ise $\frac{a}{c}$ dir.

En Küçük Ortak Kat:

a, b sıfırdan farklı tam sayılar olsun.

a) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a|k$ ve $b|k$ ise k 'ye a ve b 'nin bir ortak katı denir.

b) k, a ve b 'nin bir ortak katı olsun. Eğer $t; a$ ile b 'nin bir başka ortak katı iken $k|t$ ise k 'ye a ile b 'nin en küçük ortak katı (ekok) denir ve $[a, b] = k$ ile gösterilir.

Teorem:

$a, b \neq 0$ iki tam sayı ise $(a, b) \cdot [a, b] = |a \cdot b|$ dir.

Örnek

$x \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p = x^2 - 1$ olacak şekildeki tüm p asal sayılarını bulunuz.

Çözüm

$P = (x - 1)(x + 1)$ sayısının çarpanları

$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot p \\ p \cdot 1 \end{array} \right\} P$ asal olduğundan çarpanı 1 ve kendisidir.

$(-1) \cdot (-p)$

$(-p) \cdot (-1)$ tipindedir.

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, p = 3$ asaldır.

$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0, p = -1$ asal değil.

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, p = -1$ asal değil

$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2, x = -2 \notin \mathbb{N}$

Çözüm kümesi $p = \{3\}$ tür.

Örnek

$x \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p = x^3 - 1$ şeklindeki tüm p asallarını bulunuz.

Çözüm

$P = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ sayısının çarpanları

$p \cdot 1$

$1 \cdot p$

$(-1) \cdot (-p)$

$(-p) \cdot (-1)$ tipindedir.

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, p = 2^2 + 2 + 1 = 7$ asaldır.

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, p = -1$ asal değildir.

$x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = -1$

$p = -1$ asal değil $p = -2$ asal değil

$x^2 + x + 1 = -1 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2} \notin \mathbb{N}$

Çözüm kümesi $x = \{7\}$ dir.

Örnek

$(a, 4) = 2$ ve $(b, 4) = 2$ iken $(a + b, 4)$ nedir?

KPSS
2024
ÖABT

Bütün kitaplar cepte, tablette, masanda

VIDEO
DESTEKLİ

LİSE MATEMATİK

Arti - Yapay
Zekâ Asistan

Dijital Öğrenme
Ayak İzi

Hibrit Kitap
Teknolojisi

GEOMETRİ
İSTATİSTİK VE OLASILIK
KONU ANLATIMLI



Hibrit kitaba erişebilmek
için QR kodu okutunuz.

PEGEM AKADEMİ



Komasyon
ÖABT Lise Matematik Geometri - İstatistik ve Olasılık Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6890-83-1

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eęit. Dan. Hizm. Tic. Ař'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten uluslararası akademik bir yayınevidir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan WorldCat ve ayrıca Türkiye'de kurulan Turcademy.com tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere

<http://pegem.net> adresinden ulaşılabilmektedir.

11. Baskı: Kasım 2023, Ankara

Proje-Yayın: Nilay Balın

Dizgi-Grafik Tasarım: İlknur Öztürk

Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. şti.

İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara

Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: pegem@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz dört kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği Geometri-İstatistik ve Olasılık 3. Kitap" adlı yayıнымız Geometri - İstatistik ve Olasılık bölümünü kapsamaktadır ve Kamu Personel Seçme Sınavı (KPSS) Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı pegem@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...



Kitabın baskı tarihinden sonra gerçekleşen değişikliklere aşağıda yer alan kodu okutarak ulaşabilirsiniz.



<https://depo.pegem.net/2024oabt-lisemat-ka-guncelleme.pdf>

TÜRKİYE'DE İLK DEFA TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



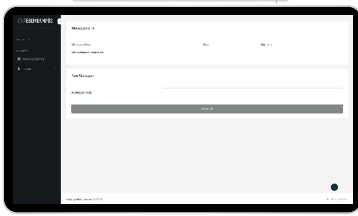
- 1 Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
- 2 Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
- 3 Konu sonu testlerini çözebilir.



Detaylı anlatım için
QR kodu okutunuz.

Yapay zekâ, bırakılan etkileşimler sonrasında kullanıcıların başarı durumlarını tespit ederek karşılıklarına bir analiz ekranı çıkarmaktadır.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden hibrit kitabınıza erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:



1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna arti.pegemkampus.com yazarak web sitemiz üzerinden etkileşimli ve yapay zekâ destekli hibrit kitaba erişim sağlayabilirsiniz.

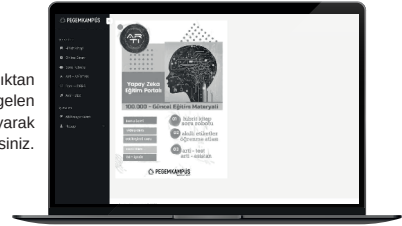


Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "Aktivasyonlarım" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.

2. Adım Aktivasyon

3. Adım Ürünlerim

Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "Hibrit Kitap" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



**Aktivasyon kodu kitabınızın ilk sayfasında yer almaktadır.
Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2024 tarihine kadar geçerlidir.**



Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

UZAYDA VEKTÖRLER

UZAYDA VEKTÖRLER.....	1
İki Vektörün Paralellığı.....	2
Vektörlerin Lineer Bileşimi.....	2
Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık.....	2
Standart Birim Vektörleri.....	2
Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı.....	2
İki Vektör Arasındaki Açık.....	3
Dik İzdüşüm Vektörü.....	3
Vektörel (Çapraz) Çarpım.....	4
Paralelkenarın Alanı.....	5
Paralelyüzün Hacmi.....	6
Çözümlü Test.....	9
Çözümler.....	11

UZAYDA DOĞRU ve DÜZLEM DENKLEMİ

UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEM DENKLEMİ.....	13
İki Noktası Belli Olan Doğru Denklemi.....	13
Düzlem.....	14
Çözümlü Sorular - I.....	16
Bir Noktanın Düzleme Uzaklığı.....	19
Çözümlü Sorular - II.....	19
Uzayda İki Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları ve Kesişme Noktasının Bulunması.....	22
Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı.....	23
Aykırı İki Doğru Arasındaki En Kısa Uzaklık ve Ortak Dikme ve Dikme Ayaklarının Bulunması.....	24
Çözümlü Sorular.....	24
İki Düzlemin Birbirlerine Göre Konumu ve İki Düzlem Arasındaki Açık.....	28
Bir Düzlem ile Bir Doğru Arasındaki Açık.....	28
İki Düzlemin Açıkortay Düzlemi.....	28
Çözümlü Sorular.....	28
Bir Doğrudan Geçen Düzlem Demeti.....	30
Uzayda Simetri.....	31
Çözümlü Sorular.....	32
Çözümlü Test - 1.....	37
Çözümler.....	39

Çözümlü Test - 2.....	41
Çözümler.....	43

YÜZEYLER

E^3 DE YÜZEY.....	46
KÜRE.....	46
Küre Olma Koşulları.....	47
Kürenin Parametrik Denklemi.....	48
Kürenin Teğet Düzlemi.....	48
SİLİNDİR.....	48
KONİ.....	50
Bazı Kuadratik Yüzeyley.....	54
Çözümlü Sorular.....	54
Silindirin İsimlendirilmesi.....	55
Dönel Yüzeyley.....	57
SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR.....	59
KÜRESEL KOORDİNATLAR.....	59
Çözümlü Test.....	60
Çözümler.....	62

KONİKLER

TANIM.....	64
Genel Konik Denkleminde x, y -li Terimi Yok Etme.....	64

ELİPS - HİPERBOL - PARABOL

ELİPS.....	66
Elipsin Denklemi.....	66
Elipsin Teğet ve Normal Denklemleri.....	67
Elipsin Parametrik Denklemi.....	68
HİPERBOL.....	70
Hiperbolün Denklemi.....	70
PARABOL.....	73
Parabolün Denklemi.....	73
Çözümlü Test.....	82
Çözümler.....	84
Karma Test - 1.....	86
Çözümler.....	88
Karma Test - 2.....	90
Çözümler.....	92

2. BÖLÜM

İSTATİSTİK VE OLASILIK

TEMEL KAVRAMLAR.....	94
Sayısal Bilgi, Veri, Ölçüm	94
Değişken ve Türleri.....	94
Fonksiyon	94
Evren ve Örneklem.....	96
İstatistik ve Parametre.....	96
Çözümlü Test.....	97
Çözümler	99

VERİNİN DÜZENLENMESİ VE MERKEZE EĞİLME ÖLÇÜLERİ

VERİNİN DÜZENLENMESİ.....	100
Grafik Çizme.....	100
Merkeze Eğilme (Yığılma) Ölçüleri.....	101
Mod (Tepe Değer).....	101
Medyan (Ortanca).....	101
Aritmetik Ortalama.....	102
Mod, Medyan ve Ortalamanın Karşılaştırılması	103
Ağırlıklı Ortalama.....	104
DEĞİŞME (DAĞILMA) ÖLÇÜLERİ	105
Ranj (Açıklık)	105
Mutlak Kayma.....	105
Varyans ve Standart Kayma	105
Bağıl Değişkenlik Katsayısı	107
STANDARTLAŞTIRMA (z ve T PUANLARI).....	107
z Puanı	107
T Puanı	107
Çözümlü Test.....	109
Çözümler	112

OLASILIK

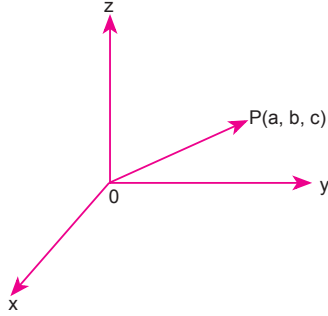
TEMEL KAVRAMLAR.....	114
Olasılık.....	115
Birleşik Olayların Olasılığı	116
Ayrık İki Olayın Birleşiminin Olasılığı.....	116
Olaylar Arasındaki Bağlılıklar	117
Şartlı Olaylar ve Olasılıklar	117
Bağımsız Olaylar	118
Çözümlü Sorular.....	119
TESADÜFİ DEĞİŞKEN, OLASILIK FONKSİYONU VE BEKLENEN DEĞER.....	121
Tesadüfi Değişkenin Beklenen Değeri.....	127
Varyans Hesabı	130
Momentler.....	133
Moment Çıkaran Fonksiyon.....	133
Birleşik Olasılık Dağılımı.....	135
Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu.....	135
Marjinal Olasılık Fonksiyonları.....	136
Kovaryans ve Korelasyon.....	138
Çözümlü Test.....	145
Çözümler	148

OLASILIK DAĞILIMLARI

OLASILIK.....	150
Binom Olasılık Dağılımı	150
Poisson Olasılık Dağılımı	152
Hipergeometrik Olasılık Dağılımı.....	153
Normal Olasılık Dağılımı.....	160
Standart Normal Olasılık Dağılımı	161
Çözümlü Test.....	163
Çözümler	166
Çözümlü Deneme - 1	168
Çözümler	171
Çözümlü Deneme - 2.....	174
Çözümler	177

UZAYDA VEKTÖRLER

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ kümesine 3 boyutlu vektör uzayı denir. Vektörlerin başlangıç noktası orijin olmak üzere, \mathbb{R}^3 ün her noktasına bir vektör karşılık gelir.



$\vec{OP} = (a, b, c)$ ise a, b, c sayılarına \vec{OP} yer vektörünün bileşenleri denir. P noktasının orijine olan uzaklığına, \vec{OP} vektörünün normu (uzunluğu) denir ve $|\vec{OP}|$ ile gösterilir.

$\vec{OP} = (a, b, c) \Rightarrow |\vec{OP}| = |\vec{P}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dir.

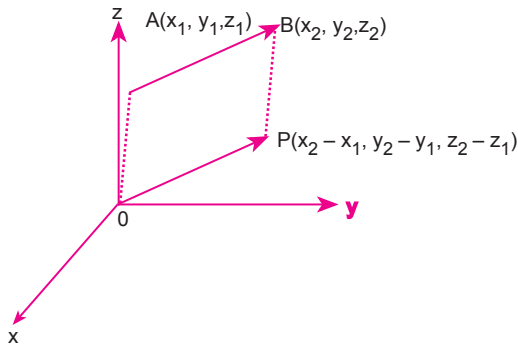
\vec{AB} vektörüne eş, başlangıç noktası orijin olan \vec{OP} vektörüne, \vec{AB} vektörünün yer vektörü denir.

$A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ ise;

$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$|\vec{OP}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Normu 1 olan vektöre birim vektör denir.



Çıkış Sorular

Uzayda $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, -4)$ ve $C(m, 2, -1)$ noktaları veriliyor.

$\vec{AB} \perp \vec{AC}$ olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -27 B) -29 C) 14 D) 29 E) 27

Çözüm

$$\vec{AB} = (1, -3, -7) \quad \vec{AC} = (m - 1, 0, -4)$$

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ dir.}$$

$$1(m - 1) + (-3) \cdot 0 + (-7)(-4) = 0$$

$$m + 27 = 0$$

$$m = -27 \text{ olur.}$$

Cevap A

Örnek

$A(1, -1, 1)$ ve $B(2, a, -3)$ noktaları veriliyor.

$|\vec{AB}| = \sqrt{26}$ br olduğuna göre a sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm

$$\vec{AB} = (1, a + 1, -4)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{26} \Rightarrow \sqrt{1^2 + (a + 1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 + 17 = 26$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow |a + 1| = 3 \Rightarrow a = 2 \text{ veya } a = -4$$

Çıkış Sorular

Dik koordinat düzleminde verilen \vec{u} ve \vec{v} vektörleri için $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 16$ olduğuna göre, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ değeri kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

Çözüm

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$\frac{(\|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\|) \cdot (\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\|)}{16} = 4 \cdot 8$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\| = 2$$

$$+ \|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 16$$

$$2 \cdot \|\vec{u} + \vec{v}\| = 18 \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = 9 \text{ olur.}$$

Cevap B

İki Vektörün Paralellliği

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $k \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ olmak üzere,

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b} \text{ dir.}$$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \text{ dir.}$$

Örnek

A(2, 4, 2) ve B(6, 2, 4) noktaları ile

$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$ vektörü veriliyor.

$\vec{AB} // \vec{v}$ olduğuna göre, (x, y) ikilisini bulunuz.

Çözüm

$$\vec{AB} = (4, -2, 2)$$

$$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$$

$$\vec{AB} // \vec{v} \Rightarrow \frac{x - y}{4} = \frac{x + 2y}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) = (1, -1) \text{ olur.}$$

Vektörlerin Lineer Bileşimi

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n \in \mathbb{R}^3$ ve $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{R}$

olmak üzere,

$\vec{u} = k_1 \cdot \vec{V}_1 + k_2 \cdot \vec{V}_2 + k_3 \cdot \vec{V}_3 + \dots + k_n \cdot \vec{V}_n$ vektörüne,

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ vektörlerinin lineer bileşimi denir.

Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık

\mathbb{R}^3 de $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ vektörleri verilsin.

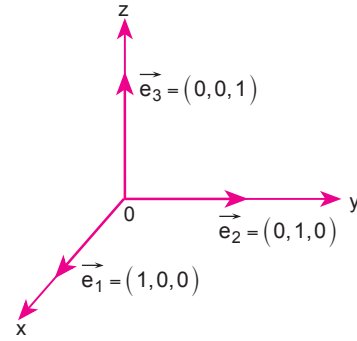
$c_1 \cdot \vec{V}_1 + c_2 \cdot \vec{V}_2 + c_3 \cdot \vec{V}_3 + \dots + c_n \cdot \vec{V}_n = \vec{0}$ denklemi yalnız

$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ için sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımsız; $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ değerlerinden en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımlı denir.

$V = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\}$, \mathbb{R}^3 uzayının bir alt kümesi olmak üzere $\det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n) = A$ olsun.

I. $A = 0 \Leftrightarrow V$ kümesi lineer bağımlı,

II. $A \neq 0 \Leftrightarrow V$ kümesi lineer bağımsızdır denir.

Uyarı!**Standart Birim Vektörleri**

\mathbb{R}^3 vektör uzayında üzerinde bulunduğu eksen ile pozitif yönlü birim vektörlere, standart birim vektörler denir.

$$\vec{e}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_3 = \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı

Her $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ için;

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

şeklinde tanımlanan işleme, " \mathbb{R}^3 de Öklid iç çarpım işlemi" denir.

Özellikleri

- $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$, $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ (değişme özelliği)
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ (çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)

1.BÖLÜM

Örnek

$\vec{A} = (3, a, -2)$ ve $\vec{B} = (a, 2, 10)$ vektörleri veriliyor.
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 5$ olduğuna göre a sayısının kaç olacağını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= 5 \\ 3a + 2a - 2 \cdot 10 &= 5 \\ 5a &= 25 \\ a &= 5\end{aligned}$$

İki Vektör Arasındaki Açık

$\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ verilsin. \vec{A} ve \vec{B} vektörleri arasındaki açının ölçüsü α olmak üzere,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha \text{ olur.}$$

$\vec{A} \perp \vec{B}$ ise $\alpha = 90^\circ$ için $\cos \alpha = 0$ olduğundan
 $\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ olur.

Örnek

$\vec{A} = (-1, 2, 3)$ ve $\vec{B} = (1, -1, 2)$ vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta \\ -1 - 2 + 6 &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}\end{aligned}$$

Örnek

$\vec{A} = (1, 1, 2)$ ve $\vec{B} = (\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, 4)$ vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 + 8 = 6 \\ |\vec{A}| &= \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{B}| &= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (-\sqrt{3} - 1)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} + 16} \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \\ \cos \theta &= \frac{6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} \text{ olur.} \\ \cos \theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Örnek

\vec{A} ile \vec{B} vektörleri arasındaki açının ölçüsü 45° ,

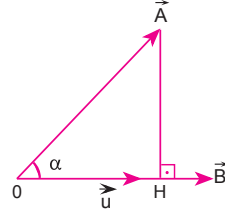
$|\vec{A}| = 2\sqrt{2}$ ve $|\vec{B}| = 3$ olduğuna göre,

$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (3\vec{A} - 2\vec{B})$ iç çarpımının sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (3\vec{A} - 2\vec{B}) &= 3 \cdot \vec{A} \cdot \vec{A} + 3 \cdot \vec{A} \cdot \vec{B} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} - 2 \cdot \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= 3 \cdot |\vec{A}|^2 + \vec{A} \cdot \vec{B} - 2 \cdot |\vec{B}|^2 \\ &= 3 \cdot 8 + 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ - 2 \cdot 9 \\ &= 24 + 6 - 18 \\ &= 12 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Dik İzdüşüm Vektörü



$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1), \vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri verilsin.

\vec{A} vektörünün \vec{B} vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü

$\vec{OH} = \vec{u}$ olsun. \vec{A} ile \vec{B} arasındaki açı α olmak üzere;

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} \text{ dir. } \cos \alpha = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{A}\|} \text{ yazılırsa}$$

$$\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{A}\|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} \Rightarrow \|\vec{u}\| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|} \text{ dik izdüşüm vektörü-}$$

nün uzunluğudur.

$$\vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} \text{ olacağından}$$

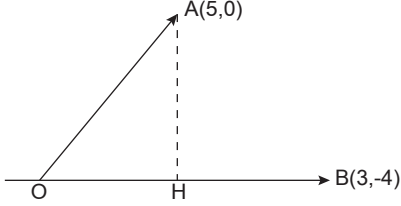
$$\vec{u} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \cdot \vec{B} \text{ dik izdüşüm vektörünü verir.}$$

Çıkış Sorular

Düzlemde $A(5, 0)$ vektörünün $B(3, -4)$ vektörü üzerine dik izdüşüm vektörünün uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm



$$\|OH\| = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{B}\|}$$

$$\|OH\| = \frac{5 \cdot 3 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\|OH\| = 3 \text{ br bulunur.}$$

Cevap C

Örnek

$\vec{A} = (1, 4, 2)$ ve $\vec{B} = (-2, 1, 3)$ vektörleri veriliyor.

\vec{A} 'nın \vec{B} üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğunun ve dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{-2 + 4 + 6}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

Dik izdüşüm vektörü;

$$\vec{u} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \cdot \vec{B} = \frac{8}{14} \cdot (-2, 1, 3) = \frac{4}{7}(-2, 1, 3) \text{ olur.}$$

Vektörel (Çapraz) Çarpım

\mathbb{R}^3 te $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri verilsin.

\vec{A} ve \vec{B} vektörlerinin vektörel çarpımı bir \vec{C} vektörünü verir.

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ şeklinde gösterilir.

$\alpha: \vec{A}$ vektörü ile \vec{B} vektörü arasındaki açı

$\vec{P}; \vec{A}$ vektörü ile \vec{B} vektörünün yönünü gösteren birim vektör olmak üzere;

\vec{A} ile \vec{B} nin vektörel çarpımı :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{P} \cdot \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \alpha \text{ dir.}$$

Elde edilen \vec{C} vektörü, \vec{A} ve \vec{B} vektörlerinin ait olduğu düzleme dik olan bir vektördür.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri, vektörel çarpımı verir.

Örnek

$\vec{A} = (3, 1, 0)$ ve $\vec{B} = (0, 1, 2)$ olduğuna göre,

$\|\vec{A} \times \vec{B}\|$ kaçtır?

Çözüm

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} \\ = (2, -6, 3)$$

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} \\ = \sqrt{4 + 36 + 9} \\ = 7 \text{ olur.}$$

Özellikleri:

$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{R}^3$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

I. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

II. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

III. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

IV. $(k \cdot \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k \cdot \vec{B}) = k \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), k \in \mathbb{R}$

V. $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \theta$ (θ : \vec{A} ve \vec{B} vektörleri arasındaki açıdır.)

VI. $\left. \begin{matrix} \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \rangle = 0 \\ \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{B} \rangle = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{A} \times \vec{B} \text{ ve } \vec{B} \perp \vec{A} \times \vec{B} \text{ dir.}$

KPSS
2024
ÖABT

Bütün kitaplar cepte, tablette, masanda

VIDEO
DESTEKLİ

LİSE MATEMATİK

Artı - Yapay
Zekâ Asistan

Dijital Öğrenme
Ayak İzi

Hibrit Kitap
Teknolojisi

ALAN EĞİTİMİ
KONU ANLATIMLI



Hibrit kitaba erişebilmek
için QR kodu okutunuz.

PEGEM AKADEMİ



Komisyon

ÖABT Lise Matematik Alan Eğitimi Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-6890-83-1

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten uluslararası akademik bir yayınevidir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan WorldCat ve ayrıca Türkiye'de kurulan Turcademy.com tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

I I. Baskı: Kasım 2023, Ankara

Proje-Yayın: Nilay Balin

Dizgi-Grafik Tasarım: İlknur Öztürk

Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.
No: 141/33, Yenimahalle/Ankara
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz dört kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği Alan Eğitimi 4. Kitap" adlı yayınlımız Alan Eğitimi bölümünü kapsamaktadır ve Kamu Personel Seçme Sınavı (KPSS) Lise Matematik Öğretmenliği Alan Eğitimi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı pegem@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...



Kitabın baskı tarihinden sonra gerçekleşen değişikliklere aşağıda yer alan kodu okutarak ulaşabilirsiniz.



<https://depo.pegem.net/2024oabt-lisemat-ka-guncelleme.pdf>

TÜRKİYE'DE İLK DEFA TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

Hibrit kitaplarda kullanıcılar;



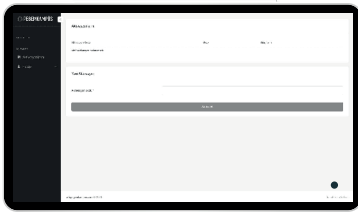
- 1 Kitabın dijital formatına erişim sağlayabilir.
- 2 Kitabın bölümleri altında video derslere erişim sağlayabilir.
- 3 Konu sonu testlerini çözebilir.



Detaylı anlatım için QR kodu okutunuz.

Yapay zekâ, bırakılan etkileşimler sonrasında kullanıcıların başarı durumlarını tespit ederek karşılarına bir analiz ekranı çıkarmaktadır.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden hibrit kitabınıza erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:



1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna arti.pegemkampus.com yazarak web sitemiz üzerinden etkileşimli ve yapay zekâ destekli hibrit kitaba erişim sağlayabilirsiniz.

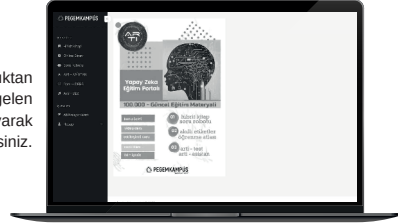


Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan "Aktivasyonlarım" sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.

2. Adım Aktivasyon

3. Adım Ürünlerim

Aktivasyon işleminizi tamamladıktan sonra menüde aktif hâle gelen "Hibrit Kitap" sekmesine tıklayarak içeriklere ulaşabilirsiniz.



Aktivasyon kodu kitabınızın ilk sayfasında yer almaktadır.
Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2024 tarihine kadar geçerlidir.



Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM: MATEMATİK NEDİR?

Matematik Nedir?	1
Mutlakçılar	1
Yarı Deneyselciler.....	2
Teorik-Uygulamalı Matematik	2
Klasik-Modern Matematik	2
Akademik-Okul Matematiği.....	2
Çözümlü Test.....	5
Çözümler	7

2. BÖLÜM: MATEMATİĞİ ÖĞRENME VE ÖĞRETME

Matematiği Öğrenme ve Öğretme	8
Bilişsel Öğrenme Alanı	8
Duyuşsal Öğrenme Alanı.....	8
Devinişsel Öğrenme Alanı	8
Davranışçı Yaklaşım.....	8
Klasik Koşullanma	8
Edimsel Koşullanma	9
Bütünlükçü (Gestaltçı) Yaklaşım.....	9
Fonksiyonist Yaklaşım	9
Bilişsel Gelişmeci Yaklaşım	9
Yapılandırmacı Yaklaşım	9
Buluş Yoluyla Öğrenme	10
Okulda Öğrenme (Tam Öğrenme).....	11
Bilgi-İşlem Yaklaşımı	11
Anlamlı Öğrenme (Sunuş Yoluyla Öğretim).....	11
Gerçekçi Matematik Eğitimi	11
Çoklu Zekâ Kuramı.....	12
Öğrenme Stilleri.....	12
Matematik Öğretimi Yöntemleri	12
Düz Anlatım Yöntemi.....	12
Tanımlar Yardımıyla Öğretim	12
Buluş Yoluyla Öğretim	12
Analizle Öğretim	13
Senaryo ile Öğretim.....	13
Gösterip Yaptırma Yöntemiyle Öğretim	13
Kurallar Yardımıyla Öğretim	13
Deneysel Etkinliklerle Öğretim.....	13
Oyunlarla Öğretim	13
Çözümlü Test.....	14
Çözümler	15

3. BÖLÜM: MATEMATİK DERSİ ÖĞRETİM PROGRAMI

Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı	16
2006 Programın Özellikleri	16
4+4+4 Eğitim Sistemi.....	16
Öğretim Programının Genel Amaçları	17
Öğretim Programının Öğrenme-Öğretme Yaklaşımı	18
Öğretim Programının Ölçme ve Değerlendirme Yaklaşımı	18
Öğretim Programında Yeterlilik ve Beceriler.....	18
Öğretim Programında Değerler Eğitimi	19
Öğretim Programının Uygulanmasında Dikkat Edilecek Hususlar.....	20
Öğretim Programının Yapısı	20
Çözümlü Test.....	26
Çözümler	27

4. BÖLÜM: PROBLEM ÇÖZME

Problem Çözme	28
Problem Nedir?.....	28
Problem Çözme.....	28
Problemi Anlama	28
Çözüm İçin Plan Yapma	28
Planın Uygulanması	28
Değerlendirme	28
Problem Çözme Öğretimi	30
Sistematik Liste Yapma	30
Tahmin ve Kontrol.....	30
Diyagram Çizme	30
Bağıntı Bulma.....	31
Değişken Kullanma.....	31
Benzer Problemlerin Çözümünden Yararlanma	31
Geriye Doğru Çalışma.....	31
Eleme	31
Tablo Yapma	31
Muhakeme etme.....	31
Problem Kurma.....	32
Matematiksel İfadeye Uygun Problem Kurma	32
Şekil veya Tabloya Uygun Problem Kurma	32
Cevabı Zihinde Tutarak Problem Kurma	32

Matematik Eğitiminde Problem Çözme	33
Problem Çözme İçin Öğretim	33
Problem Çözmeye İlişkin Öğretim	33
Problem Çözme ile Öğretim	33
Çözümlü Test	34
Çözümler	36

5. BÖLÜM: MANTIK ÖĞRETİMİ

Mantık Öğretimi	37
Temel Kavramların Öğretimi	37
Önerme Kavramı	37
Önermenin Olumsuzluğu (Değili)	38
Bileşik Önermeler	38
Veya Bağlacı (\vee) (Dahili Birleşim)	39
Ve Bağlacı (\wedge)	39
Koşullu Önerme (\Rightarrow)	39
İki Yönlü Koşullu Önerme (\Leftrightarrow)	39
Bileşik Önermelerin Özellikleri	40
Tek Kuvvet Özelliği	40
Değişme Özelliği	40
Birleşme Özelliği	40
Dağılıma Özelliği	40
Totooloji ve Çelişki	41
Açık Önermeler	41
Evrensel ve Varlıksal Niceleyiciler	41
İspat Teknikleri	42
İspat Çeşitleri	42
Çözümlü Test	47
Çözümler	49

6. BÖLÜM: KÜMELER ÖĞRETİMİ

Kümeler Öğretimi	50
Temel Kavramların Öğretimi	50
Kümeler Arasındaki İlişkilerin Öğretimi	51
Kümelerle İşlemlerin Öğretimi	52
Birleşim İşlemi	52
Kesişim İşlemi	52
Fark İşlemi	52
Kartezyen Çarpım	52
Çözümlü Test	55
Çözümler	56

7. BÖLÜM: GERÇEK SAYILAR VE DÖRT İŞLEM ÖĞRETİMİ

Gerçek Sayılar Öğretimi	57
Karekök Kavramı	58
Toplama ve Çıkarma İşlemi Öğretimi	59
İşlem Özelliklerinin Öğretimi	59
Çarpma İşlemi Öğretimi	59
İşlem Özelliklerinin Öğretimi	60
Bölme İşlemi Öğretimi	60
Gerçek Sayılar	61
Eşitlik Özellikleri	61
Eşitsizlik Özellikleri	62
Asal Sayılar	63
Bölünebilme Kuralları	64
En Büyük Ortak Bölen (EBOB) ve En Küçük Ortak Kat (EKOK)	66
Aralıklar	66
Denklem Çözümü	67
Çözümlü Test	68
Çözümler	71

8. BÖLÜM: ÜSLÜ VE KÖKLÜ İFADELER ÖĞRETİMİ

Üslü ve Köklü İfadeler Öğretimi	73
Üslü İfadeler Öğretimi	73
Üslü Denklemler	74
Köklü İfadeler Öğretimi	74
Çözümlü Test	77
Çözümler	79

9. BÖLÜM: POLİNOMLAR ÖĞRETİMİ

Polinomlar Öğretimi	80
Polinomlar Kümesinde İşlemler Öğretimi	81
Toplama ve Çıkarma Öğretimi	81
Çarpma Öğretimi	82
Bölme Öğretimi	82
Çarpanlara Ayırma Öğretimi	84
Ortak Çarpan Parantezine Alma	84
Gruplandırma	84
Tam Kare İfadelerin Çarpanlara Ayrılması	84
$a^2 + 2ab + b^2$ İfadesinin Çarpanlara Ayrılması	85
$a^2 - 2ab + b^2$ İfadesinin Çarpanlara Ayrılması	85

$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$ İfadesinin Çarpanlara Ayrılması.....	86
$a^2 - b^2$ İfadesinin Çarpanlara Ayrılması.....	86
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ İfadesinin Çarpanlara Ayrılması.....	87
$x^3 - a^3$ İfadesinin Çarpanlara Ayrılması.....	87
$ax^2 + bx + c$ Polinomunun Çarpanlara Ayrılması.....	87
Rasyonel İfadeler ve Denklemler Öğretimi.....	89
Çözümlü Test.....	91
Çözümler.....	93

10. BÖLÜM: İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLER, EŞİTSİZLİKLER VE FONKSİYONLAR ÖĞRETİMİ

İkinci Dereceden Denklemler, Eşitsizlikler ve Fonksiyonlar Öğretimi.....	94
İkinci Dereceden Denklemler Öğretimi.....	95
Eşitsizlikler Öğretimi.....	98
İkinci Dereceden Fonksiyonlar Öğretimi.....	101
Çözümlü Test.....	103
Çözümler.....	105

11. BÖLÜM: OLASILIK VE İSTATİSTİK ÖĞRETİMİ

Olasılık ve İstatistik Öğretimi.....	106
Olasılık Öğretimi.....	107
Toplama Yoluyla Sayma İlkesi.....	107
Çarpma Yoluyla Sayma İlkesi.....	107
Permütasyon.....	107
Tekrarlı Permütasyon.....	108
Kombinasyon.....	108
Binom Açılımı.....	109
Olasılıkla İlgili Temel Kavramlar.....	109
Olay Çeşitleri.....	110
Kesin ve İmkânsız Olaylar.....	110
Tümleyen Olay.....	111
Ayrık ve Ayrık Olmayan Olaylar.....	111
Bağımlı ve Bağımsız Olaylar.....	111
Koşullu Olasılık.....	112
Olasılık Çeşitleri.....	112
İstatistik Öğretimi.....	115
Veri Toplama.....	115
Tablo ve Grafikler.....	116
Merkezi Eğilim ve Yayılma Ölçüleri.....	117

Aritmetik Ortalama.....	117
Tepe Değer (Mod).....	117
Ortanca (Medyan).....	118
Açıklık (Ranj).....	118
Standart Sapma.....	118
Çözümlü Test.....	121
Çözümler.....	123

12. BÖLÜM: TRİGONOMETRİ ÖĞRETİMİ

Trigonometri Öğretimi.....	124
Yönlü Açılar Öğretimi.....	124
Trigonometrik Fonksiyonlar Öğretimi.....	126
Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri.....	126
Ters Trigonometrik Fonksiyonların Öğretimi.....	128
Üçgende Trigonometrik Bağıntıların Öğretimi.....	128
Toplam ve Fark Formüllerinin Öğretimi.....	130
Yarım Açılı Formüllerinin Öğretimi.....	130
Trigonometrik Denklemlerin Öğretimi.....	131
Çözümlü Test.....	133
Çözümler.....	135

13. BÖLÜM: KARMAŞIK SAYILAR ÖĞRETİMİ

Karmaşık Sayılar Öğretimi.....	136
Karmaşık Sayılar Öğretimi.....	137
Karmaşık Kökler.....	137
Çözümlü Test.....	138
Çözümler.....	139

14. BÖLÜM: ÜSTEL FONKSİYON VE LOGARİTMA ÖĞRETİMİ

Üstel Fonksiyon ve Logaritma Öğretimi.....	140
Üstel Fonksiyon.....	141
Logaritma Fonksiyonu.....	141
Onluk ve Doğal Logaritma.....	142
Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri.....	143
Üslü ve Logaritmalı Denklemler ve Eşitsizlikler.....	143
Çözümlü Test.....	144
Çözümler.....	146

15. BÖLÜM: DİZİLER ÖĞRETİMİ

Diziler Öğretimi	147
Toplam Sembolü	147
Diziler	148
Monoton Diziler	148
Aritmetik Dizi	149
Geometrik Dizi	149
Çözümlü Test	151
Çözümler	153

16. BÖLÜM: FONKSİYON ÖĞRETİMİ

Fonksiyon Öğretimi	154
Fonksiyon Kavramı	155
Fonksiyonların Tanım, Değer ve Görüntü Kümesi	155
Venn Şeması ile Gösterim	156
Liste Biçiminde Gösterim	156
Grafiklerle Gösterim	156
Cebirsel Gösterim	157
Fonksiyonların Grafiği	157
Fonksiyon Türleri	158
Ters Fonksiyon	159
Artan, Azalan ve Sabit Fonksiyonlar	159
Çift ve Tek Fonksiyon	160
Fonksiyonlarda İşlemler	160
Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi	161
Fonksiyonların En Geniş Tanım Kümesi	162
Parçalı Fonksiyonlar	162
Mutlak Değer Fonksiyonu	162
Çözümlü Test	164
Çözümler	166

17. BÖLÜM: LİMİT VE SÜREKLİLİK ÖĞRETİMİ

Limit ve Süreklilik Öğretimi	167
Limit	167
Süreklilik	169
Çözümlü Test	171
Çözümler	173

18. BÖLÜM: TÜREV VE İNTEGRAL ÖĞRETİMİ

Türev ve İntegral Öğretimi	174
Türev	175
Türevin Uygulamaları	176
Belirli İntegral	178
Belirsiz İntegral	179
Belirli İntegralin Uygulamaları	179
Çözümlü Test	181
Çözümler	183

19. BÖLÜM: GEOMETRİ ÖĞRETİMİ

Geometri Öğretimi	184
Çocuklarda Geometrik Düşünmenin Gelişimi ..	185
Üçgenlerde Eşlik ve Benzerlik Öğretimi	190
Üçgenin Yardımcı Elemanları	192
Pisagor Bağıntısı	192
Trigonometrik Oranlar	192
Analitik Geometri	193
Çember ve Daire	193
Geometrik Cisimler	194
Dönüşüm Geometrisi	196
Çözümlü Test	200
Çözümler	201
Kaynakça	202

MATEMATİK NEDİR?

Matematik, kimilerine göre genel ölçü ve düzen bilimi, kimilerine göre evrensel bir dil, kimilerine göre ise medeniyetten medeniyete zenginleşerek aktarılan sayılar, şekiller, uzaylar gibi soyut varlıkları ve aralarındaki ilişkileri inceleyen bilim dalıdır. Ortak bir tanıma ulaşamamakla birlikte her tanımlamanın ya da betimlemenin doğruluk payının olduğu söylenebilir. Tanımlamaların büyük bir kısmında matematiğin konusunun sayılar, şekiller, fonksiyonlar vb. soyut varlıklar olduğu ve düşünme yapısının da tümdengelim olduğu ifade edilmektedir.

Örnek

“İki çift sayının çarpımı, çifttir.” önermesinde matematiksel düşüncenin hangi işletim yolu kullanılmaktadır?

- A) İndirgeme
- B) Genelleme
- C) Soyutlama
- D) Tümevarım
- E) Tümdengelim

Çözüm

“İki çift sayının çarpımı çifttir.” önermesinin doğruluğu gösterilirken $2n$ ve $2k$ gibi iki çift sayı alınıp çarpılarak ispat yapılır. Yani en **genel** durum için önermenin doğruluğu gösterilmiş olur ve bilinir ki önerme her **özel** durum için de doğrudur. “Genelden özele” şeklinde özetlenebilen bu düşünce yapısı **tümdengelim**dir.

Cevap E

Bugünkü matematik bilginin ortaya çıkışı ile ilgili olarak iki yaklaşımdan söz edilmektedir:

1. Matematiği insanoğlu kendi icat etti.
2. Matematik evrende vardı, insanoğlu bunu yaşarken fark etti.

Her iki ekolün de savunucuları kendi yaklaşımlarını haklı çıkaracak bazı kanıtlar ortaya koymaktadır. Bunlardan ikinci yaklaşımı benimseyen grubun sunduğu örneklerden belki de en önemlisi Fibonacci Sayıları ve Altın Oran'dır. İtalyan Matematikçi Leonardo Fibonacci'nin meşhur tavşan probleminden yola çıkarak ulaştığı Fibonacci Dizisi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... şeklinde olup bu dizideki her bir terimin kendinden önceki terime oranlanmasıyla oluşan yeni dizinin yakınsadığı 1,618 değeri de Altın Oran olarak bilinmektedir. Gerek ardışık Fibonacci sayıları ve gerekse Altın Oran sayısı doğada, resimde, müzikte, mimaride ve daha pek çok yerde şaşırtıcı bir şekilde insanoğlunun karşısına çıkmaktadır.

Matematik yeni bilgilerin üretimi konusunda “kendi kendine yeterlik” özelliği ile diğer bilim dallarından farklılaşmaktadır. Yani matematiğin bilgi üretmek için geçmiş bilgilerin yanında dil ve mantık dışında bir şeye ihtiyaç yoktur.

Matematik, belli bir düzen ve mantıksal sıralamaya sahip kavram ve işlemler üzerine kurulu bir bilimdir. Bu düzen veya intizamı bulmak ve keşfetmek ve sonrasında anlamlandırmak, tam anlamıyla “matematik yapmak” demektir.

Mevcut matematik bilgisinin oluşmasına yönelik teorik matematikçiler “amaç olarak matematik” görüşünü savunurken uygulamalı matematikçiler ise “araç olarak matematik” görüşünü desteklemektedir. Genel inanış ise, bugünkü bilgilerin büyük kısmının matematik yapma amacıyla ve bir kısmının da günlük yaşam problemlerine çözüm ararken ortaya çıktığı yönündedir.

Örnek

Matematiksel bilginin türeyişinde katkısı olan bilim dalları hangileridir?

- A) Sosyoloji-Psikoloji
- B) Dil-Mantık
- C) Fizik-Kimya
- D) Tıp-Biyoloji
- E) Tarih-Edebiyat

Çözüm

Matematiğin “kendi kendine yeterlik” özelliği olduğu hatırlanırsa yeni bilgi üretmek için geçmiş bilgilerin yanında katkısı olan bilim dalları sadece **dil ve mantık**tır.

Cevap B

Matematik bilgisinin doğasına bakış farklılaşabilmektedir. Matematik felsefesine bakıldığında bu farklı algılamalardan dolayı ortaya mutlakçı, kesinlikçi ve öznelci felsefeler çıkmıştır.

Mutlakçılar

Eflatuncular, matematiğin nesne ve yapılarının insandan bağımsız olarak var olduğunu iddia etmektedirler. Onlara göre matematik yapmak, bizden önce var olan bu nesne ve yapıların keşfedilmesidir.

Matematiğin doğasına deneysel olarak bakan görüş, matematiksel doğruların deneysel yollarla genellenebileceğini söyler. **Deneyselcilik**, matematiği sağlam temeller üzerinde inşa etmeyi amaçlamış ve bunu deneysel kanıtlamalarla yapmaya çalışmıştır.

Matematiği kendi içinde tutarlı bir yapıya kavuşturmak amacıyla onu mantıksal önermelere indirgemeye çalışan **mantıkçılar** olmuştur. Onlara göre matematik, mantıktan başka bir şey değildir. Mantığı kullanılmakta amaç, matematiği kesin biçimde tanımlanmış çıkarsama kurallarına ve aksiyomlara dayandırmaktır. Bu görüşü savunuların başında **Frege**, **Russell** ve **Peano** gelmektedir.

Formalistlere göre matematik, soyut nesne ve ilişkileri konu alan simgesel bir sistemdir. Sistemi oluşturan terimler anlamsız birer simge, ilişkileri dile getiren ifadeler içerikten yoksun birer önerme kalıbidirler. Formalistler matematiği, aritmetik ve mantık aksiyonlarıyla sınırlayarak tutarlılık ve tamlık özelliğine sahip simgesel bir sisteme dönüştürmeye çalışmışlardır. Bu görüşü savunanların başında Hilbert gelmektedir.

Sezgi, matematikçinin formül, sembol veya ispat kullanmadan bir problemin çözümünü ve bir teoremin doğruluğunu görebilmesi, hissedebilmesidir. **Sezgiciler** de mantıkçılar ve formalistler gibi matematikte kesinlik arar. Onlar matematiksel kesinliği, insanın matematiksel tümevarım yeteneğine bağlamaktadır. Bildiğimiz en meşhur sezgiciler Brouwer ile Poincare'dir.

Yarı Deneyselciler

Lakatos'a göre, matematik felsefesi tarih, yöntem ve yanlışlanabilir bilgi kuramı boyutlarında ele alınmalıdır. Sosyal ve kültürel bir ürün olması nedeniyle matematikçiler yanlışlanabilir ve ürünleri de mükemmel olmayabilir. **Yarı deneyselci** yaklaşım yanlışlanabilirlik kavramına vurgu yapar ve bu sistemde kuramlar ispatlanmaz, açıklanır ve doğrulukları onaylanır. Onlara göre, matematiksel doğrular her zaman yanlışlanabilirlik aşamasında kalmaktadır ve sürekli gelişmeye ve değişmeye açıktır, dinamik bir yapıya sahiptir.

Mutlakçılardan ve yarı deneyselcilerden farklı olarak **gelenekselcilere** göre, matematiğin bilgileri ve doğrulukları, dilbilim geleneklerinden etkilenir ve onlar tarafından şekillenir. Wittgenstein'a göre, matematiksel ve mantıksal doğrular, dilin kabul edilen kurallarına ve gramerine bağlıysa ve bu durumda doğrular dilin kurallarını ve gramerini bozuyorsa yanlışlanabilirlikleri söz konusudur.

Örnek

Matematiği soyut nesne ve ilişkiler olarak ele alan ve sistemi oluşturan terimleri anlamsız birer simge, ilişkileri dile getiren ifadeleri içerikten yoksun birer önerme kalıbı olarak görenler hangi yaklaşımın savunucularıdır?

- A) Sezgici yaklaşım
- B) Deneyselci yaklaşım
- C) Mutlakçı yaklaşım
- D) Formalist yaklaşım
- E) Mantıkçı yaklaşım

Çözüm

Formalist yaklaşımı savunanlar, matematiği soyut nesne ve ilişkileri konu alan bir sistem olarak görmektedirler.

Cevap D

Matematiği kendi içinde farklı açılardan sınıflandırmak mümkündür. Teorik-uygulamalı matematik, klasik-modern matematik, akademik-okul matematiği gibi.

Teorik-Uygulamalı Matematik

Matematiğin güzelliği ve zihni uyandırması boyutuyla teorik (pür) matematikçiler ilgilenmektedir. Onlar için önemli olan yapının estetik olması ve bu durumun kişiyi entelektüel doyuma ulaştırmasıdır. Hardy'nin dediği gibi, "Teorik matematikçinin üzerinde uğraştığı sorunların, problemlerin uygulama alanı bulması, işe yaraması veya faydalı olması gibi bir endişesi yoktur."

Teorik matematikçilerin ortaya koyduğu matematiksel bilgilerin diğer bilim dallarında ve günlük yaşamda nasıl kullanılabileceğini araştırmak ise uygulamalı matematikçilerin işidir. Biliyoruz ki çoğu teorik matematik ürünü daha sonraları pratik uygulama alanı bulmuştur.

Klasik-Modern Matematik

Klasik matematik daha çok aritmetik ağırlıklı, cebirsel işlemlerin yürütülerek problemlerin çözüldüğü ve Euclid'in tanımladığı geometrik nesnelerin üzerine kurulan bir geometrinin ele alındığı matematiktir.

1960'lı yıllarda ABD'de başlatılan eğitim reformlarının sonucunda modern matematik kavramı ortaya çıkmıştır. Modern matematik, küme ve grup kavramlarını kullanarak matematiksel yapıları yeniden tanımlamaktadır. Modern matematik ile birlikte, belli semboller ve formüller kullanılarak yapılan soyutlamalar ve birbirinden bağımsız gibi görünen işlem ve algoritmalar kendi içinde tutarlı ve bağlantılı hâle gelmiştir. Modern matematik müfredatı ülkemizde 1970'li yılların başında uygulanmaya başlanmıştır.

Akademik-Okul Matematiği

Akademik matematik, teorik matematikçilerin uğraştığı matematik olarak tanımlanabilir. Akademik matematiğin amacı, matematiğin ulaştığı birikimi kullanarak teorik ve pratik alanda matematiğe bilimsel katkıda bulunmaktır.

Okul matematiği "Toplum için nasıl bir insan yetiştirmek istiyoruz?" sorusuna cevap ararken matematik ile ilgili "Ne öğretilim?" ve "Nasıl öğretilim?" konusu ile ilgilidir. Akademik matematik ürünü bilgilerin genç nesillere aktarılması, okul matematiğinin işidir.

Okullarda öğretilen matematiğin amacı her düzeyde bazı farklılıklar göstermektedir. İlköğretim ve ortaöğretim düzeyinde okul matematiğinin amacı, öğrenciye istenilen matematik kültürü vermek ve temel matematiksel beceriler yanında matematiksel düşünme yeteneğini geliştirmektir. Yükseköğretim düzeyindeki okul matematiğinin amacı ise öğrenim görülen alana göre farklılaşmaktadır. Örneğin, Fen Fakültesi Matematik bölümünde okutulan matema-