

Matematiğin Temelleri

Editör: Prof. Dr. Ahmet KAÇAR

2. Baskı





Editör: Prof. Dr. Ahmet KAÇAR

MATEMATİĞİN TEMELLERİ

ISBN 978-625-7052-95-5

DOI 10.14527/9786257052955

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2020, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. A.Ş.'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayinevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınev**idir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

1. Baskı: Haziran 2020, Ankara
2. Baskı: Kasım 2020, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türüldür
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Çetin
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Vadi Grafik Tasarım ve Reklamcılık Ltd.Şti.
İvedik Osb Oto 3. Bölge 2284 Sokak No:101
Yenimahalle/Cebeci
Tel: (0312) 395 85 71-72

Yayıncı Sertifika No: 36306
Matbaa Sertifika No: 33748

İletişim

Karanfil 2 Sokak No: 45 Kızılay/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50 - 430 67 51
Dağıtım: 0312 434 54 24 - 434 54 08
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

İnsanın dünyadaki serüveni başladığı andan itibaren, en büyük güdüsü doğayı kontrol altına almak olmuştur. Taşan nehirlerin ıslahından roket yapımına kadar insanın elindeki en yetkin düşünsel beceri ise matematiktir. Dolayısıyla matematik, hem evreni tasvir etmedeki kabiliyeti, hem de kendi içindeki tutarlı ve sistematik yapısı gereği entelektüel hayatın en önemli uğraşlarından biri haline gelmiştir.

Günümüz modern dünyasında, gelişmişliğin temel göstergesi teknolojik atılım olarak görülmektedir. Teknolojinin icracısı da “mühendis” sıfatıyla anılmaktadır. Mühendisin sözlük anlamı ise hendese yani geometri bilen demektir. Yani teknolojiyi, kabaca doğayı kontrol altına almak olarak ele alırsak, bunu yapmaya muktedir olabilecek insanın “geometri / matematik bilen” ehil kişi olması beklenmektedir. Taze bir zihne “matematik öğretmek” doğayı ehlileştirecek kudreti kendinde bulmasını sağlayacak olan, matematik eğitimcilerinden başkası değildir.

Bu kitap ortaokul matematik öğretmeni yetiştiren Eğitim Fakültelerimizin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı’nda iki yarıyıl okutulan Matematik’in Temelleri dersinin kur tanımı dikkate alınarak hazırlanmıştır. Matematik’in Temelleri isimli bu kitabın hazırlanması sürecinde, lisans eğitimlerini matematikte veya matematik eğitiminde almış olup matematik eğitimi alanında uzmanlaşan akademisyenlerin bölüm yazarı olarak seçilmesine özen gösterilmiştir. Kitabın içeriği her ne kadar pür matematik gibi görünse de içerisinde öğretmen adaylarının saha çalışmalarında kullanabilecekleri etkinlikleri de barındırmaktadır.

Ayrıca okuyucuda matematik tarihi ilgisi oluşturmak amacıyla, matematik tarihi ve felsefesi alanında uzman bir akademisyenimiz tarafından özel bir çalışma ile hazırlanan ve her bölümün konusu ile tamamen ya da kısmen ilişkili olan, ünlü matematikçilerin biyografileri de bölüm sonlarına yerleştirilmiştir.

Hedef kitlesi matematik öğretmen adayları olan bu kitabın,

birinci bölümünde küme kavramı ve özellikleri, doğal sayılar ve tam sayılar,

ikinci bölümünde kesirler, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve reel sayılar,

üçüncü bölümünde ondalıklı sayılar, yüzde kavramı ve oran-orantı kavramları,

dördüncü bölümünde çarpanlar, katlar, üslü ve köklü ifadeler,

beşinci bölümünde cebir kavramı ve tarihi

altıncı bölümünde temel geometrik kavramlar ve çizimler,

yedinci bölümünde üçgenler, dörtgenler ve çokgenler,

sekizinci bölümünde çember ve daire,

dokuzuncu bölümünde geometrik çizimler,
onuncu bölümünde dönüşüm geometrisi,
on birinci bölümünde ölçü kavramı
on ikinci bölümünde veri işleme ve olasılık

konuları ele alınmıştır.

Çalışmanın ortaya çıkması sürecindeki özenli çalışmaları için yazarlarımıza, Pegem Akademik Yayıncılık yönetici ve teknik personeline ayrı ayrı teşekkür ediyorum.

Kitabın 2. Baskısının da matematik öğretmen adaylarına, matematik öğretmenlerine ve matematiğe ilgi duyanlara faydalı olmasını dilerim.

Kasım – 2020

Prof. Dr. Ahmet KAÇAR

Editör

BÖLÜMLER VE YAZARLARI

Editör: Prof. Dr. Ahmet KAÇAR

1. Bölüm: Kümeler, Doğal Sayılar ve Tamsayılar

Dr. Feyza ALIUSTAOĞLU – Kastamonu Üniversitesi

2. Bölüm: Kesirler, Rasyonel Sayılar ve Reel Sayılar

Prof. Dr. Zülbiye TOLUK UÇAR – Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

3. Bölüm: Ondalık Gösterim, Yüzde ve Oran-Orantı Kavramları

Doç. Dr. Gülseren KARAGÖZ AKAR – Boğaziçi Üniversitesi

4. Bölüm: Çarpanlar, Katlar, Üslü ve Köklü İfadeler

Prof. Dr. Abdulkadir TUNA - Kastamonu Üniversitesi

Doç. Dr. Abdullah Çağrı BİBER - Kastamonu Üniversitesi

5. Bölüm: Cebir

Prof. Dr. Tangül KABAEEL – Anadolu Üniversitesi

6. Bölüm: Temel Geometrik Kavramlar

Prof. Dr. Asuman DUATEPE PAKSU - Pamukkale Üniversitesi

7. Bölüm: Üçgenler ve Çokgenler

Doç. Dr. Temel KÖSA - Trabzon Üniversitesi

8. Bölüm: Çember ve Daire

Prof. Dr. Ahmet IŞIK – Kırıkkale Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Ferhat ÖZTÜRK – Kırıkkale Üniversitesi

9. Bölüm: Geometrik Cisimler

Dr. Öğr. Üyesi Ruşen ALDEMİR ENGİN – Kafkas Üniversitesi

10. Bölüm: Dönüşüm Geometrisi

Dr. Öğr. Üyesi Rezan YILMAZ - Ondokuz Mayıs Üniversitesi

11. Bölüm: Ölçüler

Doç. Dr. Esen ERSOY – Ondokuz Mayıs Üniversitesi

12. Bölüm: Veri Toplama ve Değerlendirme

Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN – Atatürk Üniversitesi

Bölümlerin Sonlarındaki Matematikçilere Ait Biyografi Bilgileri

Dr. Öğr. Üyesi Müjdat TAKICAK - Kastamonu Üniversitesi

İÇİNDEKİLER

Ön Söz.....	iii
Bölümler ve Yazarları.....	v

1. BÖLÜM

KÜMELER, DOĞAL SAYILAR VE TAMSAYILAR

Küme Kavramı	1
Kümelerle İlgili Temel Kavramlar	2
Kümelerin Farklı Gösterimleri	5
Kümelerde İşlemler ve Özellikleri.....	6
Küme Problemleri.....	10
Sayı Kümelerinin Tanıtılması	12
Doğal Sayılar, Doğal Sayılarla İşlemler.....	12
Tam sayılar, Tam Sayılarla İşlemler.....	19
Açık Uçlu Sorular	27
Açık Uçlu Soruların Cevapları.....	28
Kaynaklar.....	29
Cantor	30

2. BÖLÜM

KESİRLER, RASYONEL SAYILAR VE REEL SAYILAR

Kesirler.....	33
Kesir Kavramı	33
Kesirlerin Farklı Anlamları.....	37
Kesir Çeşitleri	40
Rasyonel Sayılar.....	46
Rasyonel Sayı ile Kesir Arasındaki İlişki	46
Rasyonel Sayılarda Dört İşlem.....	47
İrrasyonel Sayılar	63
İrrasyonel Sayıları Sayı Doğrusunda Gösterme	65
Reel Sayılar	66
Sorular.....	68
Pisagor.....	82

3. BÖLÜM**ONDALIK GÖSTERİM, YÜZDE VE ORAN-ORANTI KAVRAMLARI**

Giriş	85
Ondalık Gösterim	87
Oran ve Orantı Kavramları	102
Yüzde Gösterimi	107
Düşünme Soruları	108
Kaynaklar.....	110
Napier.....	113

4. BÖLÜM**ÇARPANLAR, KATLAR, ÜSLÜ VE KÖKLÜ İFADELER**

Giriş.....	115
Doğal Sayıların Çarpanları, Katları ve Bölenleri.....	116
Bölünebilme Kuralları	118
10 ile Kalansız Bölünebilme.....	119
5 ile Kalansız Bölünebilme.....	119
2 ile Kalansız Bölünebilme.....	120
4 ile Kalansız Bölünme	120
9 ve 3 ile Kalansız Bölünebilme.....	121
6 ile Kalansız Bölünme	121
Asal Sayılar	122
Sayıların Kendi Aralarında Asal Olması.....	123
Asal Çarpanlara Ayırma.....	123
Üslü İfadeler	124
Üslü İfadelerin Özellikleri.....	125
Köklü İfadeler	131
Köklü İfadelerin Özellikleri	132
Köklü İfadelerde İşlemler	134
İç İçe Kökler	135
Kaynaklar.....	137
Gaus.....	139

5. BÖLÜM**CEBİR**

Giriş.....	141
Cebirin Tarihsel Gelişimi	142
Cebir Nedir?	143

Cebirin Temel Kavramları.....	144
Değişken Kavramı.....	144
Cebirsel İfade.....	146
Cebirsel Eşitlik.....	147
Eşitsizlik.....	153
Kaynaklar.....	154
El-Hârizmî.....	157

6. BÖLÜM TEMEL GEOMETRİK KAVRAMLAR

Temel Geometrik Kavramlar.....	159
Tanımsız Kavramlar.....	159
Tanımlı Kavramlar.....	161
Aksiom / Postulatlar.....	162
Teoremler.....	164
Temel Geometrik Çizimler.....	164
Verilen bir doğru parçasına eş doğru parçası çizme.....	165
Verilen bir açığa eş açı çizme.....	166
Verilen bir açının açıortayını çizme.....	168
Verilen bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme çizme.....	169
Verilen bir doğruya üzerindeki bir noktadan geçen dikmeyi çizme.....	170
Verilen bir doğruya dışındaki bir noktadan geçen paralel çizme.....	171
Açılar.....	172
Açı Kavramı.....	172
Açı Ölçü Birimleri.....	173
Ölçülerine Göre Açılar.....	175
Açının Düzlemde Ayırdığı Kısımlar.....	176
Açı Türleri.....	177
Doğrular ve Açılar.....	181
Değerlendirme Soruları.....	189
Kaynaklar.....	191
Öklid.....	192

7. BÖLÜM ÜÇGENLER VE ÇOKGENLER

Üçgenler.....	195
Üçgen Kavramı.....	195
Üçgen Çeşitleri.....	195

Üçgenin Yardımcı Elemanları.....	200
Üçgende Açı Kenar Bağlıntıları.....	204
Eşlik ve Benzerlik.....	207
Üçgenin Alanı.....	214
Çokgenler.....	220
Çokgen Kavramı.....	220
Düzgün Çokgenler.....	224
Dörtgenler.....	225
Dörtgen Kavramı.....	225
Yamuk.....	232
Paralelkenar.....	240
Eşkenar Dörtgen.....	244
Dikdörtgen.....	247
Kare.....	251
Deltoid.....	254
Dörtgenler Arası İlişkiler.....	257
Ölçme Değerlendirme Soruları.....	259
Kaynaklar.....	265
Descartes.....	266

8. BÖLÜM ÇEMBER VE DAİRE

Çember.....	269
Çemberin Denklemi.....	272
Düzlemde Bir Doğru ile Bir Çemberin Birbirine Göre Durumları.....	272
Çemberde Bazı Özellikler.....	273
Çemberde Açılar ve Yaylar.....	278
Çemberin Çevresi (Uzunluğu).....	292
Çemberde Yay Uzunluğu.....	292
Daire ve Alanı.....	292
Daire Diliminin Alanı.....	294
Poncelet.....	302

9. BÖLÜM GEOMETRİK CİSİMLER

Prizma.....	306
Prizmanın Temel Elemanları.....	307
Prizmaların Sınıflandırılması.....	309

Dikdörtgenler Prizmasında Köşegenler	309
Prizmanın Alanı	310
Prizmanın Hacmi	313
Kare Prizma, Küp ve Dikdörtgenler Prizması Arasındaki Bağıntı	315
Silindir	317
Silindirlerin Sınıflandırılması	319
Prizma ve Silindir Arası İlişkilendirme	319
Silindirin Alanı	320
Silindirin Hacmi	321
Piramit	322
Piramitlerin Sınıflandırılması	322
Piramidin Alanı	323
Piramidin Hacmi	324
Koni	325
Koninin Sınıflandırılması	326
Koninin Alanı	326
Silindir Koni Hacim Bağıntısı	327
Küre	328
Kürenin Alanı ve Hacmi	328
Açık Uçlu Sorular	330
Kaynaklar	331
Apollonius	333

10. BÖLÜM DÖNÜŞÜM GEOMETRİSİ

Geometrik Dönüşüm ve Tanımı	335
Düzlemsel Hareketlerin (İzometrilerin) Genel Özellikleri	336
Düzlemsel Hareket Çeşitleri	337
Öteleme Hareketi	337
Dönme Hareketi	340
Yansıma Hareketi	344
Düzlemsel Hareketler Arasındaki İlişkiler	349
Dönüşüm Geometrisinin Tarih İçindeki Gelişimi	350
Dönüşüm Geometrisi Öğretimi	352
Kaynaklar	362
Weierstrass	364

11. BÖLÜM ÖLÇÜLER

Ölçme Kavramı	367
Uzunluk Ölçme.....	370
Alan Ölçme	371
Hacim Ölçme	372
Zaman Ölçme	373
Sıvı Ölçme	374
Etkinlikler.....	375
“Ölç Dönüştür” Etkinliği.....	375
“Tabu” Etkinliği.....	376
“Bul Ölç” Etkinliği.....	377
“Çöz Bakalım” Etkinliği.....	379
“19 Mayıs Atatürk’ü Anma Gençlik ve Spor Bayramı” Etkinliği	379
Oyun Zamanı.....	384
“Zamanı Yakala” Oyunu.....	384
“Zamanın İçindeyim/ Zamanın Dışındayım” Oyunu	385
Etkinlikler.....	386
“Alan Bulma” Etkinliği.....	387
“Eşimi Bul” Etkinliği.....	389
“Çiz-Bul” Etkinliği.....	392
“Şekli mi Tahmin Et” Etkinliği	393
“Böl Beni” Etkinliği.....	393
Senaryo Adı: “Hayvanlar Âlemi”	397
“Mühendislik Zor İş” Etkinliği	400
Kaynaklar.....	407
Abel	408

12. BÖLÜM VERİ TOPLAMA VE DEĞERLENDİRME

Veri Toplama Değerlendirme	411
Verilerin Tablo İle Gösterimi.....	411
Verilerin Grafikle gösterilmesi	418
Veri Analizi.....	433
Merkezi Eğilim Ölçüleri.....	433
Merkezi Yayılım Ölçüleri	438
Olasılık.....	447

Temel Olasılık Terimleri.....	448
Koşullu (Şartlı) Olasılık.....	455
Kaynaklar.....	459
Bölüm Değerlendirme Soruları.....	460
Bölüm Değerlendirme Cevapları	461
Salih Zeki.....	463
Yazarlar Hakkında.....	469

1. BÖLÜM

KÜMELER, DOĞAL SAYILAR VE TAMSAYILAR

Dr. Feyza ALİUSTAOĞLU – Kastamonu Üniversitesi

1.1. Küme Kavramı

Küme kavramı matematiksel olarak ilk kez Georg Cantor (1845-1918) tarafından ortaya atılmıştır. Cantor küme kavramını “*Sezgilerimizle veya düşüncelerimizle iyi ayırt edilerek belirlenmiş m nesnelere bir araya gelerek M bütünü oluşturulmaktadır*” şeklinde tanımlamaya çalışmıştır. Bu ifadede dikkat çeken bazı terimler vardır. Bunlardan ilki iyi ayırt edilme (iyi tanımlılık) kavramıdır. Kümelerin tanımlanmasında iyi tanımlılık ifadesi iki farklı şekilde ele alınmaktadır: “İyi tanımlanmış nesnelere topluluğu” ve “Nesnelerin iyi tanımlanmış topluluğu”. Birinci ifade nesnelere nitelerken ikinci ifade topluluğu nitelemektedir. İyi tanımlılık nesnelere niteliği olarak düşünüldüğünde bir kümenin elemanları arasında herhangi bir ortak özellik olması gerekliliği yoktur. Ancak iyi tanımlılık topluluğun niteliği olarak düşünüldüğünde kümenin elemanları arasında ortak özellik olması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Örneğin asal sayılar kümesi ortak özelliklere sahip elemanlardan oluşmaktadır. Ancak $\{a, Ali, elma, x, 1\}$ şeklindeki bir kümenin elemanları arasında ortak özellik bulunmamaktadır. Görüldüğü gibi kümenin elemanları arasında ortak özellik bulunup bulunmaması gerekliliği tartışmaya açık bir durumdur. Cantor’un tanımlamasında dikkat çeken diğer kavram ise bütün (topluluk) kavramıdır. Topluluk kavramı tek elemandan küme oluşmayacağı, boş kümenin elemanı olmadığı için küme oluşturamayacağı gibi durumları akla getirebilmektedir. Bu ise boş kümenin ya da tek veya iki elemanlı gibi az eleman içeren kümelerin evrensel küme oluşturamayacağı şeklindeki kavrayışlara sebep olabilmektedir. Hâlbuki evrensel kümenin o an için üzerinde çalışılan en geniş küme olduğu düşünüldüğünde boş kümenin ya da tek bir elemandan oluşan bir kümenin bile evrensel küme olabileceği söylenebilir.