Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması

(Blow up of Solutions of Evolution Equations)

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

2. Baskı

PEGEM AKADEMİ

PEGEM AKADEMİ

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

ISBN 978-625-7582-11-7

1. Baskı: Haziran 2021, Ankara
2. Baskı: Ekim 2022, Ankara

Yayın-Proje: Ferdi Akkaya
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Kuyrukcu
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 47865

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

ÖN SÖZ

Fen, mühendislik, tıp,... gibi birçok alanda ortaya çıkan problemler diferansiyel denklem veya diferansiyel denklem sistemleri olarak modellenmektedir. Değişkenlerinden biri t zaman değişkeni olan diferansiyel denklemlere özel olarak evolüsyon denklemler denir. Örneğin; ısı akışı, dalgaların yayılması, bulaşıcı hastalıkların yayılması, roketlerin hareketleri,… gibi olayların modellenmesi birer evolüsyon denklemdir. Dolayısıyla bu denklemlerin çözümlerinin bulunması oldukça önemlidir. Hatta çoğu zaman çözümün davranışının incelenmesi açık çözümü bulmaktan daha önemlidir. Çözüm var mıdır, tek midir, kararlı mıdır, asimptotik davranışı nasıldır, patlama meydana gelir mi, çözüm devirli midir,… gibi sorular oldukça önemlidir. Bu nedenle denklemlerin çözümlerinin patlaması (blow up) ile ilgili bu eser ortaya çıkmıştır. Bu konuda yabancı dillerde yazılmış bazı eserler [Al'shin, Korpusov, Sveshnikov 2011; Hu 2011; Korpusov, Ovchinnikov, Sveshnikov, Yushkov 2018; Samarskii, Galaktionov, Kurdyumov, Mikhailov 1995; Straughan 1998] olmasına karşın, bildiğim kadarıyla Türkçe yazılmış herhangi bir eser bulunmamaktadır.

Bu çalışma on üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm; ön bilgilere, ikinci bölüm; çözümlerin patlaması ile ilgili temel kavram ve bazı temel örneklere ayrılmıştır. Diğer bölümlerde ise çözümlerin patlaması ile ilgili metotlar ve eşitsizlikler anlatılmış ve bunların bazı denklemlere uygulanması verilmiştir. Ayrıca her bölümün sonuna ilgili metot ile ilgili kısa bir referans bilgisi verilmiştir. Dolayısıyla okuyucunun istediği metot ile ilgili daha detaylı araştırma yapmasının önü açılmıştır. Evolüsyon denklemlerin çözümlerinin patlaması ile ilgili birçok metoda yer verilen bu çalışma kolaydan zora gitmemektedir. Yani bir metot veya uygulaması anlaşılmadan başka metotlara geçilebilir. Bu metotların denklemlere uygulanması ise adım adım olmamaktadır. Denklemde bulunan terimlere göre işlemler oldukça farklılık göstermektedir. Ayrıca, burada şunu belirtmek gerekir ki verilen bazı metot ve eşitsizlikleri metot olarak ta adlandırmak çok doğru olmayabilir. Burada her hâlükârda amaç çözümün sonlu zamanda patlaması için yeterli koşulları vermektir. Bunun için ilgili bölümde verilen eşitsizliğin sağlandığını göstermek gerekmektedir.

Akademik çalışmalarımda bana yol gösteren yüksek lisans ve doktora tez danışmanım Prof. Dr. Necat Polat'a, bu çalışma ile ilgili önerilerde bulunan Prof. Dr. Varga Kalantarov'a ve çalışmayı baştan sona okuyarak inceleyen; Nazlı Irkıl, Fatma Ekinci, Yavuz Dinç, Hazal Yüksekkaya, Ayşe Fidan, Nebi Yılmaz, Gülistan Butakın'a teşekkür ederim.

Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması ile ilgili Türkçe olarak yazılan ilk eser olması nedeniyle bazı eksik ve yanlışlıklar bulunabilir. Bu konuda her türlü eleştiri ve öneriyi memnuniyetle karşılayacağımı belirtmek isterim. Faydalı olması dileğiyle…

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
ORCID No: 0000-0001-6587-4479

episkin@dicle.edu.tr

İÇİNDEKİLER

Ön Söz iii

1. Bölüm: Ön Bilgiler 1

2. Bölüm: Çözümlerin Patlaması 17

3. Bölüm: I. Metot: Konkavlık Metodu 25

Uygulama 1: Bir Boyutlu Dalga Denkleminin Çözümlerinin Patlaması 27

Uygulama 2: Isı Denkleminin Çözümlerinin Patlaması 29

4. Bölüm: II. Metot: Genelleştirilmiş Konkavlık Metodu 37

Uygulama: Damping Terimli Hiperbolik Tipten Bir Denklemin Çözümlerinin Patlaması 40

5. Bölüm: III. Metot: Korpusov 53

Uygulama: Değişken Üslü Dalga Denkleminin Çözümlerinin Patlaması 57

6. Bölüm: IV. Metot 63

Uygulama: Klein-Gordon Denkleminin Çözümlerinin Patlaması 66

7. Bölüm: V. Metot: Zhou 71

Uygulama 1: Yüksek Mertebeden Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması 73

Uygulama 2: Viskoelastik Dalga Denkleminin Çözümlerinin Patlaması 78

8. Bölüm: VI. Metot: Li ve Tsai 87

Uygulama: Zayıf Damping Terimli Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Patlaması 90

9. Bölüm: VII. Metot: Özdeğer Metodu 107

10. Bölüm: VIII. Metot: Açık Eşitsizlik Metodu 111

Uygulama: Isı Denkleminin Çözümlerinin Patlaması 111

11. Bölüm: IX. Metot: Georgiev ve Todorova 115

Uygulama 1: Doğrusal Olmayan Damping Terimli Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Patlaması 116

Uygulama 2: Klein-Gordon Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması 126

Uygulama 3: Gecikmeli Terim ve Logaritmik Kaynak Terim İçeren Viskoelastik Dalga Denkleminin Çözümlerinin Patlaması 136

12. Bölüm: X. Metot: Vitillaro 151

Uygulama 1: Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Patlaması........ 151

Uygulama 2: Yüksek Mertebeden Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması 165

13. Bölüm: XI. Metot: Logaritmik Konvekslik Metodu 179

Uygulama 1: Doğrusal Isı Denkleminin Çözümlerinin Sonsuzda Patlaması 180

Uygulama 2: Güçlü Damping Terimli Logaritmik Petrovsky Denkleminin Çözümlerinin Sonsuzda Patlaması 182

Kaynaklar 189

1. BÖLÜM

Ön Bilgiler

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı temel kavramlar kısaca verilmiştir [Adams ve Fournier 2003; Brezis 2011; Pişkin 2017].

$L^p(\Omega)$ Uzayları

Tanım 1.1. Ω, R^n de ölçülebilir bir bölge olsun. u ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p. kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır, ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu şartı sağlayan tüm u fonksiyonlarının uzayına L^p Lebesgue uzayı denir. Burada L^p uzayının elemanları $\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfıdır.

Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı bu norm ile bir Banach uzayıdır.

Not. $L^p(\Omega)$ uzayında

i. $p = 1$ alınırsa $L^1(\Omega) = L(\Omega)$ integrallenebilir fonksiyonlar uzayı,

ii. $p = 2$ alınırsa $L^2(\Omega)$ karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır.

Sonuç 1.2. $L^2(\Omega)$ uzayı

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv dx$$

iç çarpımı ile Hilbert uzayıdır.

Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem. $a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right)$$

dır.

Teorem (Young Eşitsizliği). $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dır.

Not. $\delta > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Young eşitsizliğinde $a = \delta X$ ve $b = \frac{Y}{\delta}$ alınırsa

$$XY \leq \frac{\delta^p X^p}{p} + \frac{\delta^{-q} Y^q}{q}$$

eşitsizliği elde edilir.

Not (ε lu Young Eşitsizliği). Young eşitsizliğinde $a = (\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} X$ ve $b = \frac{Y}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}}$ alınırsa

$$XY \leq \varepsilon X^p + C(\varepsilon) Y^q$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır.

Teorem (Hölder Eşitsizliği).

$1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır.

Sonuç. $p, q, r > 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L^r(\Omega)$ olur ve

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır.

Teorem (Minkowski Eşitsizliği).

$1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $u, v \in L^p(\Omega)$ ise bu durumda $u + v \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

dır.

Teorem (Jensen Eşitsizliği). $F : R^n \to R$ fonksiyonu $x_1, x_2 \in R^n$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$F[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)F(x_1) + tF(x_2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa F ye konveks fonksiyon denir. F konveks bir fonksiyon ve $\Omega \subset R^n$ sınırlı ölçülebilir bir küme olmak üzere $f \in L^1(\Omega)$ için

$$F\left(\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx\right) \leq \left(\int\limits_{\Omega} F[f(x)]\,dx\right)$$

olur. Ayrıca $w(x) \geq 0$ için

$$F\left(\frac{\int_\Omega f(x)\,w(x)\,dx}{\int_\Omega w(x)\,dx}\right) \leq \frac{\int_\Omega F[f(x)]\,w(x)\,dx}{\int_\Omega w(x)\,dx}$$

dır. Özel olarak $\int_\Omega w(x)\,dx = 1$ ise

$$F\left(\int_\Omega f(x)\,w(x)\,dx\right) \leq \int_\Omega F[f(x)]\,w(x)\,dx$$

elde edilir.

Teorem (Green Özdeşliği). $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olmak üzere

$$\int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\nabla u$ dır.

$L^\infty(\Omega)$ **Uzayı**

Tanım ($L^\infty(\Omega)$ Uzayı). Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her (hhh)[1] yerde

$$|u(x)| \leq K$$

olacak şekilde bir K sabiti bulunabiliyorsa u fonksiyonuna hemen hemen her yerde sınırlıdır denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına $|u|$ nun Ω bölgesindeki *esas (essential) supremumu* denir ve

$$ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

ile gösterilir.

Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonları ile tanımlanan uzaya $L^\infty(\Omega)$ uzayı denir. Yani

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u : \Omega \to R : \ u \text{ ölçülebilir ve} \\ |u| \leq K \text{ olacak şekilde bir } K \text{ sabiti vardır.} \end{array} \right\}$$

Bu uzayda norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} &= ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \\ &= \inf \{K : |u| \leq K\} \end{aligned}$$

dır.

[1] $B \subset A$ ve B nin ölçümü sıfır ($|B| = 0$) olsun. Bu durumda $A \backslash B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik A kümesinin hemen hemen her yerinde sağlanıyor denir.

Teorem (Riesz-Fischer).

$1 \leq p \leq \infty$ olsun. $L^p(\Omega)$ uzayı Banach uzayıdır.

Teorem. $u, v \in L^\infty(\Omega)$ ise $u + v \in L^\infty(\Omega)$ ve

$$\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

dır.

Teorem. $u \in L^1(\Omega)$ ve $v \in L^\infty(\Omega)$ ise

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_\infty$$

dır.

Teorem. $vol(\Omega) = \int_\Omega dx < \infty$ (Ω bölgesi sınırlı) ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q$$

olur. Yani

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Eğer $u \in L^\infty(\Omega)$ ise

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$$

dur. Sonuç olarak, eğer $1 \leq p \leq \infty$ için $u \in L^p(\Omega)$ ve $\|u\|_p \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa $u \in L^\infty(\Omega)$ ve

$$\|u\|_\infty \leq K$$

dır.

Sonuç. Ω bölgesinin ölçümü sonlu ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ise

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

dır.

Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_i lerin n bileşenlisi ise α ya *çoklu indis* denir.

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \end{aligned}$$

olsun. Eğer $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ ise bu durumda

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

ve

$$\begin{aligned} D^\alpha u &= \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \\ &= D^{\alpha_1} u D^{\alpha_2} u ... D^{\alpha_n} u \end{aligned}$$

olarak yazılır.

Tanım. Ω kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi $C(\Omega)$ (Continuous=sürekli) ile gösterilir.

Normu ise

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

dır.

Tanım. Ω kümesi üzerinde tanımlı m. mertebeye kadar bütün $D^\alpha u$ türevleri sürekli olan fonksiyonlar $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Ayrıca $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ dır. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

dır.

$C^\infty(\Omega)$ uzayı ise bütün mertebeden türevli ve sürekli fonksiyonlardır. Yani

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

dır.

Tanım. $C_B(\Omega)$, $C(\Omega)$ (Bounded=Sınırlı) daki sınırlı fonksiyonlardan oluşan uzaydır. $C_B^m(\Omega)$ ise m. mertebeye kadar bütün $D^\alpha u$ türevleri sürekli ve sınırlı olan fonksiyonlar uzayıdır. Yani

$$C_B^m(\Omega) = \left\{ u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{C^m(\Omega)} < \infty \right\}$$

dır.

$C_0^\infty(\Omega)$ **Uzayı ve Kompakt Destek**

Tanım. R^n de tanımlı ve sonlu bir bölge dışında kendisi ve bütün mertebeden türevleri sıfır olan fonksiyonlar sınıfına *kompakt destekli fonksiyonlar* denir. Yani

$$\mathrm{supp}u = \overline{\{x : \ u(x) \neq 0\}}$$

dır.

$\mathrm{supp}u \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonu Ω da *kompakt desteğe sahiptir* denir ve $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına *test fonksiyonları* denir.

$L^p(a, b; \ X)$ **Uzayı**

Tanım. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|u\|_X \in L^p(a, b)$ koşulunu sağlayan (a, b) den X e tanımlanmış ölçülebilir u fonksiyonlar uzayına $L^p((a, b); \ X)$ uzayı denir.

Bu uzay

$$\|u\|_{L^p(a,b; \ X)} = \begin{cases} \left(\int\limits_a^b \|u\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \underset{t \in (a,b)}{ess\sup} \|u\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile Banach uzayıdır.

$C^m([0,T];\ X)$ **Uzayı**

Tanım. $\forall t \in [0,T]$ için $[0,T]$ den X e tanımlanmış ve m. mertebeye kadar türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayına $C^m([0,T];\ X)$ uzayı denir.

Bu uzay

$$\|u\|_{C^m([0,T];\ X)} = \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{t\in[0,T]} \|D^\alpha u\|_X$$

normu ile Banach uzayıdır.

Teorem. $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(0,T;X)$ ve $u_t \in L^p(0,T;X)$ ise

$$u \in C^1(0,T;X)$$

dır.

Tanım (Zayıf türev). $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi v dx$$

ise $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α. *zayıf (genelleştirilmiş) türevi* denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

$W^{m,p}(\Omega)$ **Sobolev Uzayı**

Tanım. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) :\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. Yani kendisi ve m. mertebeye kadar bütün genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayında olan fonksiyonlar sınıfına Sobolev uzayı denir.

Sobolev uzayında normlar: $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\ D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

ve $p=\infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \| D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

olarak tanımlanır.

Teorem. $W^{m,p}(\Omega)$ Banach uzayıdır.

Not.

i. $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ dır.

Yani; $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x) = u$ olacak şekilde $(u_k) \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ fonksiyon dizisinin varlığıdır.

ii. $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı, $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında bulunan ve $(m-1)$. mertebeye kadar bütün türevleri Ω nın $\partial\Omega$ sınırında sıfır olan fonksiyonların kümesidir. Yani;

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega) : \; u|_{\partial\Omega} = u'|_{\partial\Omega} = ... = u^{(m-1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

dır.

Buradan da görüldüğü gibi $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı, $W^{m,p}(\Omega)$ uzayının alt uzayıdır. Yani

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$$

dır.

Teorem. $1 \leq p < \infty$ ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$W_0^{m,p}(R^n) = W^{m,p}(R^n)$$

dır.

Not. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında

$m = 0$ ise $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ile

$p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ ile gösterilir.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \simeq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$