

# SAYILAR ve GEOMETRİ

Prof. Dr. *Salim Yüce*

*Yüce* Research Group





Editör: Prof. Dr. *Salim Yüce*

## SAYILAR VE GEOMETRİ

ISBN 978-625-7880-36-7

DOI 10.14527/9786257880367

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2020, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. A.Ş. ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik, kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz, dağıtılamaz. Bu kitap T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayinevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayinevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye’de kurulan **Turcademy.com** ve **Pegemindex.net** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000’ in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

I. Baskı: Haziran 2020, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türüldür  
Dizgi-Grafik Tasarım: Pegem Akademi  
Kapak Tasarımı: Dilara Çetinberk

Baskı: Ay-bay Kırtasiye İnşaat Gıda Pazarlama ve Ticaret Limited Şirketi  
Çetin Emeç Bulvarı 1314.Cadde No:37/A-B  
Çankaya / ANKARA  
0312 472 58 55

Yayıncı Sertifika No: 36306  
Matbaa Sertifika No: 46661

### İletişim

Karanfil 2 Sokak No: 45 Kızılay/ANKARA  
Yayınevi: 0312 430 67 50 - 430 67 51  
Dağıtım: 0312 434 54 24 - 434 54 08  
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60  
İnternet: [www.pegem.net](http://www.pegem.net)  
E-ileti: [pegem@pegem.net](mailto:pegem@pegem.net)  
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

*Akademik hayatımın her anında büyük destekleri ile yanımda olan çok kıymetli Hocam Sayın **Prof. Dr. Nuri Kuruođlu**'na ithaf ediyorum.*

## Önsöz

Geometri, Cebir ve Analiz alanlarının buluştuğu, matematiğin güzel ve nispeten temel bir hesaplaması olan ve sayıların matematik düzeyinde geniş bir görünümünü sunan bu kitap, matematiğin tüm alanlarındaki lisans öğrencilerinin yanında üniversitelerin tüm bölümlerindeki öğrenciler tarafından okunabilir. Ayrıca, bu kitap temel konuların çekici ve olağandışı işleyişi nedeniyle lisansüstü öğrencileri ve matematik araştırmacıları arasında popüler olacağı düşüncesindeyim. Bu kitapta,

- ikili (düzlemsel) sayı sistemleri (kompleks, hiperbolik, dual, genelleştirilmiş kompleks ve kompleks-hiperbolik-dual sayı) ve bunların izomorf olduğu 2-boyutlu düzlemleri (Öklid, Lorentz, Galile);

- uzaysal sayı sistemleri (reel kuaterniyon, dual kuaterniyon, oktoniyon);

- Fibonacci ile Lucas sayı dizileri

geometrik, cebirsel ve analiz yaklaşımları ile incelendi. Burada özellikle literatürdeki dual kuaterniyon ile ilgili küçük karışıklık da, dual katsayılı kuaterniyonlar ile dual kuaterniyonlar ayrı ayrı incelenerek giderilmiştir.

Matematik alanında ilk olma özelliğine sahip bu kitabı, 2006 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi'nde göreve başladıktan kısa süre sonra planladım. Ancak sayıların bitmeyen çekiciliği ve idari görevlerim nedeniyle tamamlayamadım. 2018 yıllarında YÖK-TEBİP öğrencileri ile tanışmam sonucu beraber yürüttüğümüz TÜBİTAK 2209A projeleri ile heyecanım yeniden canlanmış ve bazı bölümleri TEBİP öğrencilerim ile lisansüstü öğrencilerimi aynı platformda buluşturarak oluşturduğumuz akademik ortamda belli bir olgunluğa ulaşmış ve proje tamamlandıktan sonra "Yüce Research Group" öğrencilerim ile uzun süren bir akademik çalışma neticesinde, "sayılar" konusunun ilgilendiği tüm alanlara hitap edecek düzeyde kaleme alınmıştır.

En derin saygılarımla.

Prof. Dr. Salim Yüce  
Yıldız Teknik Üniversitesi

# İçindekiler

<b>1</b>	<b>Giriş</b> .....	<b>14</b>
1.1	Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar	16
1.2	En Genel Kompleks Sayılar	17
1.3	Hiperkompleks Sayılar	19
1.4	Clifford Cebiri	21
1.5	Reel ve Kompleks Clifford Cebiri	22
<b>2</b>	<b>Kompleks Sayılar ve Öklid Düzlemi</b> .....	<b>24</b>
2.1	Kompleks Sayılar	25
2.1.1	Kompleks Sayılar Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar	25
2.1.2	Kompleks Sayılarda Eşlenik ve Bölme İşlemi	29
2.1.3	Kompleks Sayılarda İç Çarpım ve Norm	30
2.1.4	Kompleks Sayıların Matris Gösterimi	33
2.1.5	Kompleks Sayıların Kutupsal Gösterimi	35
2.1.6	Kompleks Sayılarda De Moivre Formülü	36
2.1.7	Kompleks Sayılarda Euler Formülü	36
2.1.7.1	Kutupsal Formda Çarpma ve Bölme	37
2.1.8	Kutupsal Formda Kompleks Sayının Kökleri	38
2.1.9	Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar	39
2.1.9.1	Kompleks Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	43
2.1.9.2	Kompleks Değişkenli Fonksiyonlarda Türev ve Analitiklik	45

2.2	Öklid Düzlemi	56
2.2.1	Öklid Düzleminde Cebirsel Yapılar	56
2.2.2	Öklid Düzleminde İç Çarpım ve Norm	56
2.2.3	Reel Değerli Tek ve Çok Değişkenli Fonksiyonlar	59
2.2.3.1	Öklid Düzleminde Dönme Matrisi	62
2.2.3.2	Reel Değerli Tek Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	64
2.2.3.3	Reel Değerli İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	67
2.3	Literatür Özeti	69
<b>3</b>	<b>Hiperbolik Sayılar ve Lorentz Düzlemi</b>	<b>72</b>
3.1	Hiperbolik Sayılar	73
3.1.1	Hiperbolik Sayılar Üzerinde Cebirsel Yapılar	73
3.1.2	Hiperbolik Sayılarda Eşlenik ve Bölme İşlemi	79
3.1.3	Hiperbolik Sayılarda İç Çarpım ve Norm	79
3.1.4	Hiperbolik Sayıların Matris Gösterimi	82
3.1.5	Hiperbolik Sayıların Kutupsal Gösterimi	85
3.1.6	Hiperbolik Sayılarda De Moivre Formülü	87
3.1.7	Hiperbolik Sayılarda Euler Formülü	88
3.1.7.1	Kutupsal Formda Çarpma ve Bölme	89
3.1.8	Kutupsal Formda Hiperbolik Sayının Kökleri	89
3.1.9	Hiperbolik Değişkenli Fonksiyonlar	90
3.1.9.1	Hiperbolik Fonksiyonlarda Türev	95
3.2	Lorentz Düzlemi	99
3.2.1	Lorentz Düzleminde Temel Kavramlar	99
3.2.2	Lorentz Düzleminde Çember	102
3.2.3	Lorentz Düzleminde Dönme Matrisi	104
3.2.4	Lorentz Düzleminde Farklı Türdeki Vektörler Arasındaki Açık	107
3.2.4.1	Future Pointing (Past Pointing) Timelike Vektörler Arasındaki Açık	110
3.2.4.2	Bir Future Pointing Timelike Vektör ve Bir Past Pointing Timelike Vektör Arasındaki Açık	115
3.3	Literatür Özeti	118
<b>4</b>	<b>Dual Sayılar ve Galile Düzlemi</b>	<b>122</b>
4.1	Dual Sayılar	123
4.1.1	Dual Sayılar Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar	123
4.1.2	Dual Sayılarda Eşlenik ve Bölme İşlemi	127

4.1.3	Dual Sayılarda İç Çarpım ve Norm	128
4.1.4	Dual Sayıların Matris Gösterimi	130
4.1.5	Dual Sayıların Kutupsal Gösterimi	132
4.1.6	Dual Sayılarda De Moivre Formülü	135
4.1.7	Dual Sayılarda Euler Formülü	135
4.1.7.1	Kutupsal Formda Çarpma ve Bölme	136
4.1.8	Kutupsal Formda Dual Sayının Kökleri	136
4.1.9	Dual Değişkenli Fonksiyonlar	137
4.1.9.1	Dual Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	138
4.1.9.2	Dual Fonksiyonlarda Türev ve Analitiklik	140
4.1.9.3	Dual Değişkenli Fonksiyonun Taylor Açılımı	144
4.1.10	Dual Sayının Mutlak Değeri ve Dual Sayılarda Sıralama	147
4.2	Galile Düzlemi	148
4.2.1	Galile Görecelik Prensibi	148
4.2.2	Doğrusal (Rectilinear) Hareket	148
4.2.3	Doğrusal (Rectilinear) Galile Hareketi ve Galile Dönüşümleri	148
4.2.4	Galile Geometri'de Afin uzay	150
4.2.5	Galile Geometri'de İç işlem	150
4.2.6	Galile Geometri'de Dış işlem	150
4.2.7	Galile Geometri'de İç çarpım	151
4.2.7.1	Galile Geometri'de İç Çarpım özellikleri	151
4.2.8	Galile Geometri'de özel İç Çarpım	151
4.2.9	Düzlemin Ortonormal Baz Vektörleri	151
4.2.10	Galile Geometri'de Metrik özellikler	151
4.2.10.1	Galile Geometri'de Norm	151
4.2.10.2	Galile Geometri'de özel Norm	152
4.2.10.3	Galile Geometri'de Diklik	152
4.2.10.4	Galile Geometri'de İki Nokta Arasındaki Uzaklık	153
4.2.10.5	İki Nokta Arasındaki özel Uzaklık	153
4.2.10.6	Galile Geometri'de Merkezil Çember	154
4.2.10.7	İki Doğru Arasındaki Açık	155
4.2.10.8	İki Doğru Arasındaki Dik Açık ve Paralel Doğrular Arasındaki Açık	156
4.2.10.9	Bir Noktadan Bir Doğruya Uzaklık	157
4.2.10.10	Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık	158

4.2.11 Galile Düzlemde Trigonometri ve Üçgen	159
4.2.11.1 Bir Üçgenin Kenarları Arasındaki Bağını	160
4.2.11.2 Üçgenin Açılı Formülü	160
4.2.11.3 Galile Düzlemde Trigonometri	161
4.3 Literatür Özeti	163

## 5 Dual Uzaylar ..... 166

5.1 $\mathbb{D}^n$ Dual Uzay	167
5.1.1 $\mathbb{D}$ -Modül ve Dual Vektörler	167
5.1.2 $\mathbb{D}^n$ , $\mathbb{D}$ -Modül Üzerinde İç Çarpım	168
5.1.3 $\mathbb{D}^n$ , $\mathbb{D}$ -Modül Üzerinde Norm	171
5.1.4 $\mathbb{D}^3$ , $\mathbb{D}$ -Modül Üzerinde E. Study Dönüşümü	173
5.1.4.1 Plücker Doğru Koordinatları	177
5.1.5 Dual Açılı	181
5.1.5.1 Yönlü Doğruların Birbirine Göre Dual Açılıya Bağlı Durumları	184
5.1.5.2 Dual Açılıın Özellikleri	188
5.1.6 $\mathbb{D}$ -Modül Üzerinde Vektörel Çarpım	188
5.1.6.1 Vektörel Çarpımın Özellikleri	189
5.1.7 $\mathbb{D}$ -Modül Üzerinde Karma Çarpım	194
5.1.7.1 Karma Çarpımın Özellikleri	195
5.1.8 Dual Vektörlerin Lineer Bağımsızlığı, Baz ve Boyut	196
5.1.9 $\mathbb{D}$ -Modül Üzerinde Dual İzometrilere	198
5.1.10 Dual Eğriler	199
5.1.11 Dual Geodezik Üçlü	200
5.1.12 Dual Küresel Hareket	201
5.2 $\mathbb{D}_1^n$ Dual Lorentz Uzayı	203
5.2.1 $\mathbb{D}^n$ , $\mathbb{D}$ -Modül Üzerinde Lorentz İç Çarpımı	203
5.2.1.1 Dual Vektörlerin Sınıflandırılması	206
5.2.1.2 $\mathbb{D}_1^n$ Üzerinde Norm	206
5.2.2 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzay Üzerinde E. Study Dönüşümü	208
5.2.2.1 Lorentzian Plücker Doğru Koordinatları	210
5.2.3 Dual-Hiperbolik Açılı	210
5.2.3.1 Özel Durumlar:	212
5.2.4 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzayında Vektörel ve Karma Çarpım	213
5.3 Literatür Özeti	215



<b>6</b>	<b>Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar ve Afin Cayley-Klein Düzlemi</b> . . . . .	<b>218</b>
6.1	Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar	219
6.1.1	Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar	219
6.1.2	Genelleştirilmiş Kompleks Sayılarda Eşlenik ve Bölme İşlemi	223
6.1.3	Genelleştirilmiş Kompleks Sayılarda İç Çarpım ve Norm	224
6.1.4	Genelleştirilmiş Kompleks Sayıların Matris Gösterimi	226
6.1.5	Genelleştirilmiş Trigonometrik ( $p$ -trigonometrik) Fonksiyonlar	228
6.1.6	Genelleştirilmiş Kompleks Sayıların Kutupsal Gösterimi	231
6.1.7	Genelleştirilmiş Kompleks Sayılarda De Moivre Formülü	231
6.1.8	Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Euler Formülü	232
6.1.8.1	Kutupsal Formda Çarpma ve Bölme	233
6.1.9	Kutupsal Formda Genelleştirilmiş Kompleks Sayıların Kökleri	237
6.1.10	Genelleştirilmiş Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar	238
6.1.10.1	Genelleştirilmiş Kompleks Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	240
6.1.10.2	Genelleştirilmiş Kompleks Değişkenli Fonksiyonlarda Türev ve Analitiklik	242
6.2	Afin Cayley-Klein Düzlemi	251
6.2.1	Afin Cayley-Klein Düzleminde Cebirsel Yapılar	251
6.2.2	Afin Cayley-Klein Düzleminde İç Çarpım ve Norm	251
6.2.3	Afin CK-Düzleminde Trigonometrik Fonksiyonlar	253
6.2.3.1	Afin CK-Düzleminde Dönme Matrisi	255
6.2.4	Afin CK-Düzleminde Limit, Süreklilik ve Türev	256
6.3	Literatür Özeti	257
<b>7</b>	<b>Diğer Düzlemsel Sayı Yapıları</b> . . . . .	<b>262</b>
7.1	Kompleks Hiperbolik Sayılar (Hiperbolik Kompleks Sayılar)	263
7.1.1	Kompleks Hiperbolik Sayılar Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar	263
7.1.2	Kompleks Hiperbolik Sayılarda Eşlenik, Bölme İşlemi ve Norm	268
7.1.3	Kompleks Hiperbolik Sayıların Matris Gösterimi	271
7.1.4	Kompleks Hiperbolik Değişkenli Fonksiyonlar	274
7.2	Kompleks Dual Sayılar (Dual Kompleks Sayılar)	276
7.2.1	Kompleks Dual Sayılar Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar	276
7.2.2	Kompleks Dual Sayılarda Eşlenik, Bölme İşlemi ve Norm	280
7.2.3	Kompleks Dual Sayıların Matris Gösterimi	283
7.2.4	Kompleks Dual Değişkenli Fonksiyonlar	286

7.3	Dual Hiperbolik Sayılar (Hiperbolik Dual Sayılar)	288
7.3.1	Dual Hiperbolik Sayılar Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar	288
7.3.2	Dual Hiperbolik Sayılarda Eşlenik, Bölme İşlemi ve Norm	293
7.3.3	Dual Hiperbolik Sayıların Matris Gösterimi	296
7.3.4	Dual Hiperbolik Değişkenli Fonksiyonlar	299
7.4	Karışık Sayılar	300
7.4.1	Karışık Sayılar Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar	300
7.4.2	Karışık Sayılarda Eşlenik, Bölme İşlemi ve Norm	304
7.4.3	Karışık Sayıların Matris Gösterimi	306
7.5	Literatür Özeti	308

## 8 Reel Kuarterniyonlar ..... 312

8.1	Reel Kuarterniyonların Cebiri	313
8.1.1	Reel Kuarterniyon Tanımı ve Özellikleri	313
8.1.2	Reel Kuarterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	317
8.1.3	Reel Kuarterniyonların Kompleks İfadesi	319
8.1.4	Reel Kuarterniyon Uzayının İzomorf Olduğu Vektör Uzayı	319
8.1.5	Reel Kuarterniyonların Kutupsal Gösterimi	321
8.1.6	Reel Kuarterniyonlar için De Moivre Formülü	322
8.1.7	Reel Kuarterniyonlar için Euler Formülü	323
8.1.8	Reel Kuarterniyon Uzayında Analiz	323
8.1.8.1	Reel Kuarterniyon Uzayında Fonksiyonlar	323
8.1.8.2	Reel Kuarterniyon Uzayında Limit ve Süreklilik	324
8.1.8.3	Reel Kuarterniyonun Türevi	325
8.1.8.4	Diğer Kuarterniyonik Fonksiyonların Türevi	326
8.1.8.5	Reel Kuarterniyon Uzayında Cauchy-Riemann Denklemleri	327
8.1.9	Simplektik Geometri	329
8.2	Reel Kuarterniyonların Matris Gösterimleri	330
8.2.1	Reel Kuarterniyonların Reel Matris Gösterimi	330
8.2.2	Reel Kuarterniyonların Kompleks Matris Gösterimi	331
8.2.3	Reel Kuarterniyonlara Karşılık Gelen Matris için De Moivre Formülü	334
8.2.4	Reel Kuarterniyonlara Karşılık Gelen Matris için Euler Formülü	338
8.3	Reel Kuarterniyonlarla Dönmeler ve Geometrik Yorumlar	339
8.3.1	4-Boyutlu Uzayda Dönme	339
8.3.2	3-Boyutlu Uzayda Dönme	344

8.4	Literatür Özeti	357
9	Diğer Kuaterniyon Yapıları .....	362
9.1	Dual Kuaterniyonlar	363
9.1.1	Dual Katsayılı Kuaterniyonlar	363
9.1.1.1	Dual Katsayılı Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	366
9.1.1.2	Dual Katsayılı Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi	370
9.1.1.3	Çizgi Kuaterniyonu	370
9.1.1.4	Dual Katsayılı Kuaterniyonların Reel Matris Gösterimi	371
9.1.2	Dual Kuaterniyonlar	372
9.1.2.1	Dual Kuaterniyon Tanımı ve Özellikleri	372
9.1.2.2	Dual Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	376
9.1.2.3	Dual Kuaterniyonlarda İç Çarpım ve Norm	377
9.1.2.4	Dual Kuaterniyon Uzayının İzomorf Olduğu Vektör Uzayı	380
9.1.2.5	Dual Kuaterniyonların Reel Matris Gösterimi	381
9.1.2.6	Dual Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi	382
9.1.2.7	Dual Kuaterniyonlar için De Moivre Formülü	382
9.1.2.8	Dual Kuaterniyonlar için Euler Formülü	385
9.2	Split Kuaterniyonlar	386
9.2.1	Split Kuaterniyon Tanımı ve Özellikleri	386
9.2.2	Split Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	389
9.2.3	Split Kuaterniyonların Matris Gösterimleri	391
9.2.3.1	Split Kuaterniyonların Reel Matris Gösterimleri	391
9.2.3.2	Split Kuaterniyonların Kompleks Matris Gösterimleri	392
9.2.4	Split Kuaterniyonlar için De Moivre Formülü	393
9.2.5	Split Kuaterniyonlar için Euler Formülü	394
9.3	Hiperbolik Kuaterniyonlar	395
9.3.1	Hiperbolik Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	396
9.3.2	Birim Hiperbolik Küre Ve Birim Pure Hiperbolik Küre	396
9.3.3	Kutupsal Hiperbolik Form	397
9.3.4	Hiperbolik Kuaterniyonların Reel Matris Gösterimi	398
9.4	Bi-Kuaterniyonlar (Complexified Quaternion)	400
9.4.1	Bi-Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	401
9.4.2	Bi-Kuaterniyonların Kompleks Matris Gösterimi	402

9.5	Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar	403
9.5.1	Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	404
9.6	Literatür Özeti	406
<b>10</b>	<b>Oktoniyonlar</b>	<b>412</b>
10.1	Reel Oktoniyonların Cebiri	413
10.1.1	Reel Oktoniyonların Tanımı ve Özellikleri	413
10.1.2	Reel Oktoniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	418
10.1.3	Reel Oktoniyon Uzayının İzomorf Olduğu Vektör Uzayı	421
10.1.4	Reel Oktoniyonların Kutupsal Gösterimi	422
10.1.5	Reel Oktoniyonlar için De Moivre Formülü	424
10.1.6	Reel Oktoniyonlar için Euler Formülü	425
10.1.7	Reel Oktoniyonların Kuaterniyon Katsayılı İfadesi	426
10.2	Reel Oktoniyonların Matris Gösterimleri	430
10.2.1	Reel Oktoniyonların Kuaterniyon Matris Gösterimi	430
10.2.2	Reel Oktoniyonların Reel Matris Gösterimi	431
10.2.3	Reel Oktoniyonların Reel Matris Gösteriminin Farklı Metotla Bulunuşu	434
10.3	Reel Oktoniyonlarla Dönmeler ve Geometrik Yorumlar	436
10.3.1	Oktoniyon Operatörü	436
10.3.2	Reel Oktoniyonlarla Dönme	436
10.3.3	7 Boyutlu Öklid Uzayında Dönmeler	437
10.3.4	8 Boyutlu Öklid Uzayında Dönmeler	443
10.3.5	Hamilton Üçgenleri	444
10.3.6	8 Boyutlu Dönmenin Geometrisi	447
10.3.7	Geometrik Yorum	449
10.4	Diğer Oktoniyon Yapıları	451
10.5	Literatür Özeti	452
<b>11</b>	<b>Fibonacci ve Lucas Sayıları</b>	<b>458</b>
11.1	Fibonacci Sayıları ve Özellikleri	459
11.1.1	Fibonacci'nin Hayatı	459
11.1.2	Tavşan Problemi	461
11.1.3	Fibonacci Sayıları	462
11.1.4	Altın Oran	462
11.1.5	Fibonacci Sayıları için Binet Formülü	465
11.1.6	Fibonacci Sayılarına ait Özellikler	467

11.2	Lucas Sayıları ve Özellikleri	477
11.2.1	Lucas'ın Hayatı	477
11.2.2	Lucas Sayıları	477
11.2.3	Lucas Sayıları için Binet Formülü	478
11.2.4	Lucas Sayılarına ait Özellikler	478
11.3	Fibonacci Serileri	488
11.4	Fibonacci Sayıları ve Geometri	505
11.4.1	Fibonacci Eğrisi	505
11.4.1.1	Fibonacci Eğrisinin Frenet Vektörleri ve Eğriliği	505
11.4.2	Fibonacci Vektörleri	508
11.4.2.1	Fibonacci 3-vektörler için Binet Formülü	509
11.4.2.2	Fibonacci 3-vektörler için İç Çarpım ve Norm	509
11.4.2.3	Fibonacci 3-vektörler için Vektörel ve Karma Çarpım	511
11.5	Lucas Sayıları ve Geometri	515
11.5.1	Lucas Eğrisi	515
11.5.1.1	Lucas Eğrisinin Frenet Vektörleri ve Eğriliği	515
11.5.2	Lucas Vektörleri	517
11.5.2.1	Lucas 3-vektörler için Binet Formülü	518
11.5.2.2	Lucas 3-vektörler için İç Çarpım ve Norm	518
11.5.2.3	Lucas 3-vektörler için Vektörel ve Karma Çarpım	519
11.6	Literatür Özeti	521
12	<b>Diğer Fibonacci Sayı Yapıları</b> .....	<b>526</b>
12.1	Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları	527
12.1.1	Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları için Binet Formülü	527
12.1.2	Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarına ait Özellikler	528
12.2	Kompleks Fibonacci Sayıları	541
12.2.1	Kompleks Fibonacci Sayılarına ait Özellikler	541
12.3	Hiperbolik Fibonacci Sayıları	544
12.3.1	Hiperbolik Fibonacci sayıları için Binet Formülü	544
12.3.2	Hiperbolik Fibonacci Sayılarına ait Özellikler	544
12.4	Dual Fibonacci ve Dual Lucas Sayıları	545
12.4.1	Dual Fibonacci ve Dual Lucas sayıları için Binet Formülü	545
12.4.2	Dual Fibonacci ve Dual Lucas Sayılarına ait Özellikler	546

12.5	Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonları	547
12.5.1	Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için Binet Formülü	547
12.5.2	Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonlarına ait Özellikler	548
12.6	Fibonacci ve Lucas Oktoniyonları	549
12.6.1	Fibonacci ve Lucas Oktoniyonları için Binet Formülü	549
12.6.2	Fibonacci ve Lucas Oktoniyonlarına ait Özellikler	550
12.7	Literatür Özeti	551

# 1. Giriş

1.1	Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar	16
1.2	En Genel Kompleks Sayılar	17
1.3	Hiperkompleks Sayılar	19
1.4	Clifford Cebiri	21
1.5	Reel ve Kompleks Clifford Cebiri	22