

2027

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

VIDEO DERS
HEDİYELİ

MEB-AGS ÖABT

LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

ANALİZ - DİFERANSİYEL DENKLEMLER

KONU ANLATIMLI



ÖABT KONU
DAĞILIMINA
UYGUN



SINAV SORU
TİPLERİNE
YÖNELİK



KAVRAMSAL
ANLATIM

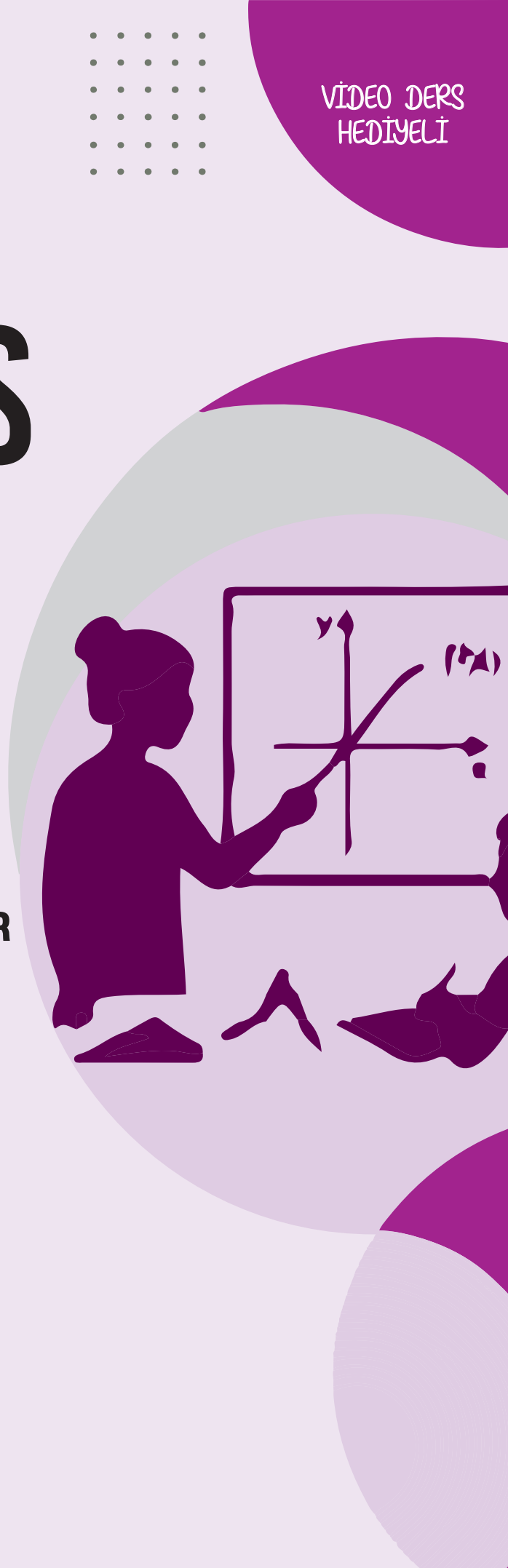


Video derslere ve kitabın
baskı tarihinden sonraki
güncellemelere erişebilmek için
QR kodu okutunuz.



PEGEM

AKADEMİ





Komisyon

MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Analiz Diferansiyel Denklemler Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-8844-70-2

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

3. Baskı: 2026, Ankara

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: yayinevi@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Baskı: Ankara Özgür Matbaacılık

1250. Cad. No: 25 Ostim Yenimahalle/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 46821

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği 1. Kitap" adlı yayınıımız Analiz ve Diferansiyel Denklemler bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB - AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı yayinevi@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi



Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

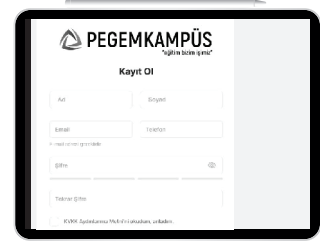


Detaylı anlatım için
QR kodu okutunuz.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:

1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.

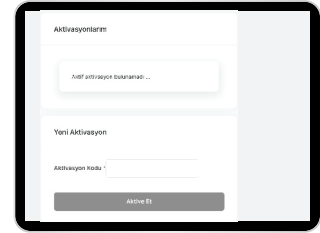


2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan **“Aktivasyonlarım”** sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



Yırtmayınız
Kazıyınız



3. Adım Ürünlerim

“Hibrit Kitap” sekmesinden kitabınızın konu anlatımına ve video derslere, **“Ölçme İstasyonu”** sekmesinden konu sonu testlerine erişim sağlayabilirsiniz.



Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2027 tarihine kadar geçerlidir.



Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

1. KISIM

1. BÖLÜM – POLİNOMLAR

POLİNOMLAR	1
İki Polinom Eşitliği	1
Sabit Terim	1
Katsayılar Toplamı	2
Polinom Derecesiyle İlgili Özellikler	2
Polinomlarda Kalan Bulma	2

2. BÖLÜM – İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER	14
Kökler Ve Katsayılar Arasındaki Bağlantılar	14
Kökleri Bilinen İkinci Derece Denklemin Yazılması	14
Karmaşık Sayılar	15
İ Sayısının Kuvvetleri	15
Karmaşık Sayıların Eşitliği	15
Karmaşık Sayıların Eşleniği	15
İkinci Dereceden Denklemin Karmaşık Kökleri	15
İkinci Dereceye Dönüştürülebilen Denklemler Ve Denklemler Sistemleri	16

3. BÖLÜM – PARABOL

PARABOL	27
İki Parabolün Birbirine Göre Durumları	28
Bir Doğru İle Bir Parabolün Durumları	28

4. BÖLÜM – EŞİTSİZLİKLER

EŞİTSİZLİKLER	48
İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Köklerinin Varlığı Ve İşareti	48

5. BÖLÜM – TRİGONOMETRİ

TRİGONOMETRİ	53
Açı Ölçü Birimleri	53
Trigonometrik Fonksiyonlar	53
Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri	53
Trigonometrik Özdeşlikler	54
Geniş Açıların Trigonometrik Oranları	54
Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları	55
Kosinüs Teoremi	55
Sinüs Teoremi	55
Üçgenin Alanı	55
Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	56
Periyodik Fonksiyonlar	56
Toplam Ve Fark Formülleri	57
İki Kat Açılış Formülleri	57
Trigonometrik Denklemler	57

6. BÖLÜM – LOGARİTMA

Üstel Fonksiyon	83
Logaritma Fonksiyonu	83
Logaritma Fonksiyonunun Grafiği	83
Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri	84
Logaritmali Denklem Ve Eşitsizlikleri	85

7. BÖLÜM FONKSİYONLAR

FONKSİYONLAR	101
FONKSİYON ÇEŞİTLERİ	102
Birebir fonksiyon	102
Örten fonksiyon	103
İçine fonksiyon	104
Sabit fonksiyon	104
Tek ve Çift fonksiyon	104
Birim fonksiyon	105
Ters fonksiyon	105
Bileşke fonksiyon	105
Bileşke fonksiyonun Özellikleri	105
ALIŞILMIŞ FONKSİYON TÜRLERİ	106
Kuvvet fonksiyonları	106
Polinom fonksiyonlar	106
Rasyonel fonksiyonlar	106

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR	
PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR	107
MUTLAK DEĞER FONKSİYONU	107
MUTLAK DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER VE DENKLEMLER	109
SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONU	111
İŞARET FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ	112
TAM DEĞER VE TAM DEĞER FONKSİYONU	113
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ	113
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN GRAFİKLERİ	116
FONKSİYONLARIN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ	117
FONKSİYON GRAFİKLERİNDE ÖTELEMELER	118
8. BÖLÜM LİMİT	
LİMİT	124
SAĞ – SOL LİMİT	124
GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ	126
LİMİT İLE İLGİLİ TEOREMLER	127
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ	128
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN LİMİTİ	129
SİGNUM FONKSİYONUNUN LİMİTİ	130
TAM DEĞER FONKSİYONLARININ LİMİTİ	131
BELİRSİZ DURUMLAR 0/0 BELİRSİZLİĞİ	133
TRİGONOMETRİK 0/0 BELİRSİZLİĞİ	134
∞/∞ BELİRSİZLİĞİ	135
$\infty-\infty$ BELİRSİZLİĞİ	137
$0 \cdot \infty$ BELİRSİZLİĞİ	138
ÜSLÜ, ÜSTEL BELİRSİZLİKLERİN ∞/∞ FORMU	139
SÜREKLİLİK	140
SÜREKLİLİK TEOREMLERİ	140
SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ	141
Kaldırılabilir Süreksizlik	141
Sıçrama Süreksizliği	141
Sonsuz Süreksizliği	141
Balzano Teoremi	141
DÜZGÜN SÜREKLİLİK	143
9. BÖLÜM TÜREV	
TÜREV	150
SAĞ-SOL TÜREV	151
LİMİT – SÜREKLİLİK – TÜREV İLİŞKİSİ	151
TÜREV ALMA KURALLARI	152
YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER	166
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ	168
Parçalı Fonksiyonların Türevi	168
MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ	169
SİGNUM FONKSİYONUNUN TÜREVİ	170
TAM DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ	170
TÜREVİN UYGULAMALARI	180
L'Hospital Kuralı	180
ÜSTEL BELİRSİZLİKLER	183
$1^\infty, 0^0, \infty^0$ Belirsizlikleri	183
TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU	185
POLİNOM – TÜREV İLİŞKİSİ	186
DİFERANSİYEL UYGULAMALARI	186
MAKSİMUM – MİNİMUM PROBLEMLERİ	187
Maksimum – Minimum Problemlerinde Kullanılabilecek Kısayollar	190
TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU	194
Teğet – Eğim – Türev İlişkisi	194
ARTAN – AZALAN FONKSİYONLAR	199
YEREL EKSTREMUM DEĞERLER	202
Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum Noktası	203
TÜREV – EKSTREMUM İLİŞKİSİ	203
Grafikte Maksimum ve Minimum Nokta Yorumu	205
TÜREVLENEBİLİR BİR FONKSİYONUN EĞRİLİK YÖNÜ	206

ASİMPTOT KAVRAMI	211
Düşey Asimptot.....	211
Yatay Asimptot.....	212
Eğik-Eğri Asimptot	213
FONKSİYONUN GRAFİKLERİ.....	215
TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER.....	215
10. BÖLÜM İNTEGRAL	
BELİRSİZ İNTEGRAL.....	231
TEMEL İNTEGRAL ALMA KURALLARI.....	232
İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ	237
A) Değişken Değiştirme Yöntemi.....	237
ÖZEL DÖNÜŞÜMLER.....	240
$\sqrt{a^2 - x^2}$ İfadesini İçeren İntegraller.....	240
$\sqrt{x^2 - a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller.....	241
$x^2 + a^2$ ve $\sqrt{x^2 + a^2}$ İfadesini İçeren İntegraller.....	241
RASYONEL (KESİRLİ) İFADELERİN İNTEGRALI.....	242
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALI	246
İndirgeme Bağlantıları	248
B) Kısmi İntegrasyon Yöntemi	248
BELİRLİ İNTEGRAL	254
Riemann İntegrali.....	254
İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMLERİ	256
Belirli İntegrallerin Özellikleri.....	256
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALI	261
İNTEGRALDE ALAN	263
İNTEGRALDE HACİM	264
Kabuk Yöntemi	269
Eğri Uzunluğu Hesabı	272
Dönel Yüzeyin Alanı	274
Pappus – Guldin Teoremi	275
11. BÖLÜM DİZİLER – SERİLER	
DİZİ	278
Sonlu Dizi.....	278
Sabit Dizi.....	278
EŞİT DİZİLER.....	279
ALT DİZİ	279
DİZİLERDE DÖRT İŞLEM.....	280
DİZİLERDE SINIRLILIK.....	281
DİZİLERDE MONOTONLUK.....	281
ARİTMETİK VE GEOMETRİK DİZİLER	282
Aritmetik Dizi.....	282
Geometrik Dizi	283
DİZİLERDE LİMİT.....	284
Dizilerde Limit ile İlgili Özellikler.....	286
Dizilerde En Büyük Alt Sınır (Ebas) – En Küçük Üst Sınır (Eküs) Kavramları	287
SERİLER	288
Geometrik Seri.....	290
Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testleri	293
Genel Terim Testi	293
İntegral Testi	293
p – Testi	294
Karşılaştırma Testi	294
Karşılaştırma Testinin Limit Formu	294
Cauchy – Kök Testi	295
D’alambert Oran Testi.....	296
Limit Testi.....	297
Alterne Seriler	297
Mutlak Yakınsaklık – Yakınsaklık İlişkisi	297
KUVVET SERİLERİ.....	298
Yakınsaklık Yarıçapı.....	298
Yakınsaklık Aralığında Türevlenebilme ve İntegrasyon	299
Taylor ve Maclaurin Serileri.....	300
Önemli Maclaurin Seri Açılımları	301

12. BÖLÜM ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ.....	315
Seviye Eğrileri.....	318
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik.....	318
Süreklilik	321
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Türev (Kısmi Türev).....	321
Çok Değişkenli Fonksiyonların 2. Türevi	323
Zincir Kuralı.....	324
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Teğet Düzlem Denklemi	324
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA MAKSİMUM-MİNİMUM	325
Yerel Maksimum	325
Yerel Minimum	325
Kritik Nokta – Eyer Nokta.....	326
Kritik Nokta İçin 2. Türev Testi	326
Maksimum-Minimum Problemleri.....	328
Kapalı Fonksiyonun Türevi	328
ÇÖZÜMLÜ TESTLER.....	330

2. KISIM

13. BÖLÜM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

DİFERANSİYEL DENKLEMLER	424
Diferansiyel Denklemlerin Çözümü.....	425
Genel ve Özel Çözümler.....	426
Varlık ve Teklik Teoremi	427
Bir Eğri Ailesinin Diferansiyel Denkleminin Oluşturulması.....	428
DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR DENKLEMLER	430
DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR HÂLE GETİRİLEBİLEN DENKLEMLER.....	432
HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	433
Homojen Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	433
HOMOJEN HÂLE DÖNÜŞTÜRÜLEBİLİR DİFERANSİYEL DENKLEMLER	434
TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	436
İNTEGRASYON ÇARPANI YARDIMI İLE DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ	438
İntegrasyon Çarpanını Bulma	438
LİNEER DENKLEMLER	440
Lineer Diferansiyel Denklemin Çözüm Yöntemi	440
BERNOULLİ DENKLEMLERİ.....	442
RICCATİ DENKLEMİ	443
BİRİNCİ MERTEBEDEN n. DERECEDEKİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER	448
Türev, x'e veya y'ye Göre Çözülebilen Denklemler	448
Türev Göre Çözülebilen Denklemler.....	448
x'e Göre Çözülebilen Denklemler	449
y'ye Göre Çözülebilen Denklemler	449
CLAİRAUT DENKLEMİ	450
LAGRANGE DENKLEMİ.....	451
İNDİRGENEBİLİR 2. MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	452
YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	454
3. Mertebeden Homojen Olmayan Lineer Denklem.....	454
Mertebe İndirgeme.....	455
Sabit Katsayılı Denklemler.....	456
Farklı Reel Kökler	456
Katlı Reel Kökler	457
Kompleks Kök	457
Homojen Olmayan (2. Yanlı) Lineer Diferansiyel Denklemler.....	460
Belirsiz Katsayılar Yöntemi	460
PARAMETRELERİN DEĞİŞİM YÖNTEMİ	464
CAUCHY – EULER DENKLEMİ	466
ÇÖZÜMLÜ TESTLER.....	472

POLİNOMLAR

$n \in \mathbb{N}$ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve x değişken olmak üzere,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ifadesine **gerçek katsayılı tek değişkenli polinom** denir.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinomunda,

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ katsayılarıdır.
- a_n baş katsayısıdır. (Derecesi en büyük olan terimin katsayısıdır.)
- a_0 sabit terimdir. (x 'i içermeyen ifadedir.)
- $P(x)$ polinomunun derecesi $\deg[P(x)]$ ile gösterilir ve bu polinom da $\deg[P(x)] = n$ 'dir. (x 'in en büyük doğal sayı kuvvetidir.)
- $a_0 \neq 0$ olmak üzere, $P(x) = a_0$ polinomuna **sabit polinom** denir ve sabit polinomun derecesi sıfırdır.
- $P(x) = 0$ polinomuna **sıfır polinom** denir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

Örnek

$P(x) = 7x^4 + 6x^5 + 3x^2 + 2x - 1$ polinomunda,

Katsayılar $\rightarrow 7, +6, 3, 2, -1$
Derece $\rightarrow \deg[P(x)] = 5$

Baş katsayı $\rightarrow 6$
Sabit terim $\rightarrow -1$

Örnek

$$R(x) = x^4 + 2x^{n-2} + x^{\frac{18}{n}} + 1$$

ifadesi bir polinom olduğuna göre, n 'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

$R(x)$ 'in polinom olması için x 'in kuvvetleri doğal sayı olmalıdır.

$$\begin{aligned} \frac{18}{n} \in \mathbb{N} & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) ve (ii) den} \\ n = 2, 3, 6, 9, 18 \text{ olur.} \end{array} \right. \\ \Rightarrow n = 1, 2, 3, 6, 9, 18 \dots \text{(i)} & \\ n - 2 \in \mathbb{N} & \\ \Rightarrow n - 2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 2 \dots \text{(ii)} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Toplamları} \\ = 2 + 3 + 6 + 9 + 18 \\ = 38 \text{ bulunur.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Örnek

$P(x) = (a - 5)x^2 + (a + 2b + 1)x + 4$ polinomu sabit polinom ve $R(x) = (m + 4)x + n - 6$ polinomu sıfır polinom olduğuna göre, $a + b + m + n$ toplamı kaçtır?

$$\begin{aligned} P(x) \text{ sabit polinom ise } & \begin{cases} a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5 \text{ 'tir.} \\ a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 5 + 2b + 1 = 0 \\ \Rightarrow 2b = -6 \\ \Rightarrow b = -3 \text{ 'tür.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(x) \text{ sıfır polinom ise } & \begin{cases} m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \text{ 'tür.} \\ n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ 'dir.} \end{cases} \end{aligned}$$

O hâlde, $a + b + m + n = 5 - 3 - 4 + 6 = 4$ bulunur.

Sıfır polinomda bütün katsayılar ve sabit terim sıfıra eşitlenirken sabit polinomda sadece değişkenin katsayıları sıfıra eşitlenir.

NOT

$$\begin{aligned} R(x) \text{ sıfır polinom ise } & \begin{cases} m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \text{ 'tür.} \\ n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ 'dir.} \end{cases} \end{aligned}$$

O hâlde, $a + b + m + n = 5 - 3 - 4 + 6 = 4$ bulunur.

İki Polinom Eşitliği

$P(x)$ ve $Q(x)$ gibi iki polinomun dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerin katsayıları da birbirine eşit ise $P(x)$ ile $Q(x)$ polinomlarına **eşit polinom** denir ve $P(x) = Q(x)$ şeklinde gösterilir.

Sabit Terim

Bir polinomun sabit terimi bulunurken verilen polinomda değişken yerine 0 (sıfır) yazılır.

$P(x)$ polinomunun sabit terimi: $P(0)$

$P(x + 1)$ polinomunun sabit terimi: $P(1)$

$P(x - 3)$ polinomunun sabit terimi: $P(-3)$

Soruda hangi polinomun "sabit terimi" ve "katsayılar toplamı" sorulduğuna dikkat etmeliyiz.

NOT

Katsayılar Toplamı

Bir polinomunun katsayılar toplamı bulunurken verilen polinomda değişken yerine 1 yazılır.

- $P(x)$ polinomunun katsayılar toplamı: $P(1)$
- $P(x + 1)$ polinomunun katsayılar toplamı: $P(2)$
- $P(x - 3)$ polinomunun katsayılar toplamı: $P(-2)$
- $P(x)$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı: $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$, dir.
- $P(x)$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamı: $\frac{P(1) - P(-1)}{2}$, dir.

Örnek

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

olduğuna göre, $A \cdot B$ çarpımını bulalım.

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$3x+1 = Ax + A + Bx - B$$

$$A + B = 3 \text{ ve } A - B = 1 \text{ dir.}$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A=4 \\ A=2 \text{ ve } B=1 \text{ dir.} \end{cases} \Rightarrow A \cdot B = 2 \text{ bulunur.}$$

$P(x)$ bir polinom olmak üzere, $P(a) = 0$ eşitliğini sağlayan a değerlerine $P(x)$ polinomunun kökleri (veya sıfırları) denir.

Örnek

$$P(x+1) = x^2 - 6x + m \text{ polinomu veriliyor.}$$

$P(x-2)$ polinomunun katsayılar toplamı 18 olduğuna göre, $P(x)$ polinomunun sabit terimini bulalım.

$$P(x-2) \text{ polinomunun katsayılar toplamı:}$$

$$P(-1) = 18 \text{ dir.}$$

$$x = -2 \text{ için } P(-1) = 4 + 12 + m = 18$$

$$16 + m = 18$$

$$m = 2 \text{ dir.}$$

$P(x)$ polinomunun sabit terimi $P(0) = ?$

$$x = -1 \text{ için } P(0) = 1 + 6 + 2 = 9 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$P(x)$ bir polinom olmak üzere,

$$P(x+3) + P(2x-1) = 9x+12$$

olduğuna göre, $P(5)$ değerini bulalım.

$$P(x) = ax + b \text{ olsun.}$$

$$P(x+3) = ax + 3a + b \text{ ve } P(2x-1) = 2ax - a + b \text{ olur.}$$

$$ax + 3a + b + 2ax - a + b = 9x + 12$$

$$\Rightarrow 3ax + 2a + 2b = 9x + 12 \text{ (iki polinomunun eşitliğinden)}$$

$$\Rightarrow 3a = 9 \text{ ve } 2a + 2b = 12$$

$$\Rightarrow a = 3 \quad 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow P(x) = 3x + 3 \Rightarrow P(5) = 15 + 3 = 18 \text{ bulunur.}$$

Soruda iki polinomun toplamı 1. dereceden bir polinoma eşit ise $P(x) = ax + b$ şeklinde seçilmelidir.

Polinomun Derecesi ile İlgili Özellikler

$\text{der}[P(x)] = a$, $\text{der}[Q(x)] = b$ ve $a > b$ olmak üzere,

✓ $\text{der}[P(x) \mp Q(x)] = a$	✓ $\text{der}[P^n(x)] = n \cdot a$
✓ $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = a + b$	✓ $\text{der}[P(x^n)] = n \cdot a$
✓ $\text{der}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = a - b$	✓ $\text{der}[P(Q(x))] = a \cdot b$

Polinomlarda Kalan Bulma

✓ $P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölümünden kalanı bulmak için x yerine a yazılır.

→ $P(x)$ polinomunun $(x - 3)$ ile bölümünden kalan $P(3)$ değeridir.

→ $P(x - 1)$ polinomunun $(x + 2)$ ile bölümünden kalan $P(-3)$ değeridir.

✓ $P(x)$ polinomunun $x^n - a$ ile bölümünden kalanı bulmak için x^n yerine a yazılır.

✓ $P(x)$ polinomunun $x^2 + ax + b$ ile bölümünden kalanı bulmak için x^2 yerine $-ax - b$ yazılır.

2027

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

VIDEO DERS
HEDİYELİ

MEB-AGS ÖABT

LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

SOYUT CEBİR – LİNEER CEBİR
KONU ANLATIMLI



ÖABT KONU
DAĞILIMINA
UYGUN



SINAV SORU
TİPLERİNE
YÖNELİK



KAVRAMSAL
ANLATIM

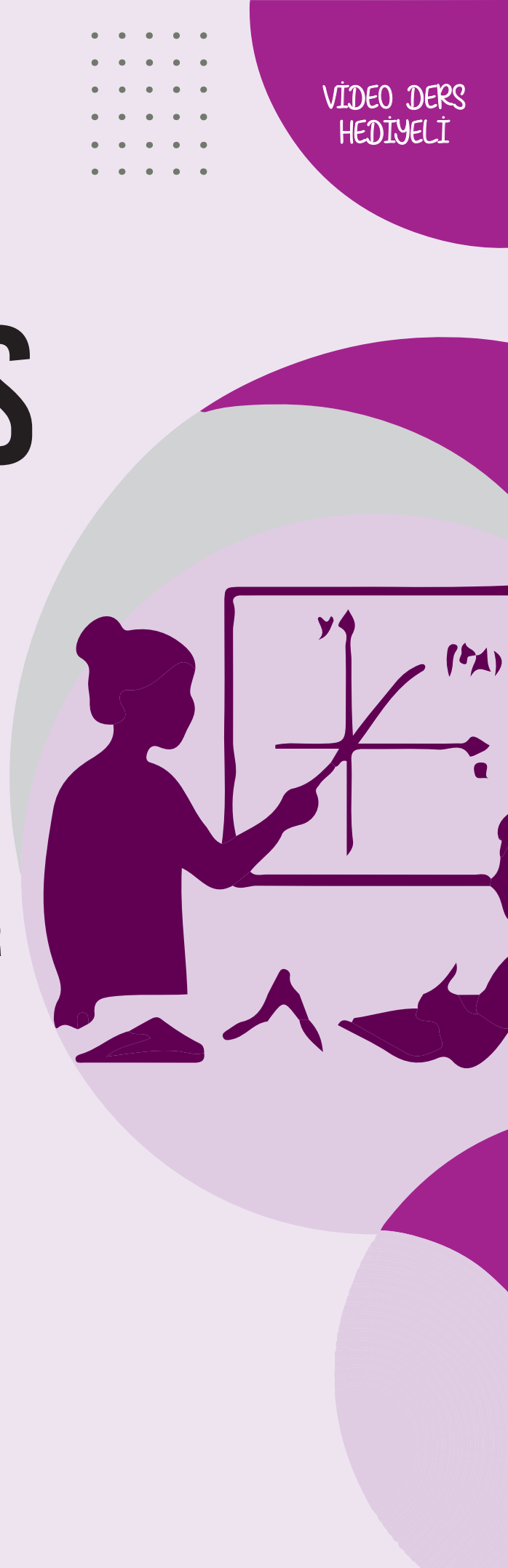


Video derslere ve kitabın
baskı tarihinden sonraki
güncellemelere erişebilmek için
QR kodu okutunuz.



PEGEM

AKADEMİ





Komisyon
MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği
Soyut Cebir - Lineer Cebir Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-8844-70-2

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

3. Baskı: 2026, Ankara

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: yayinevi@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Baskı: Ankara Özgür Matbaacılık

1250. Cad. No: 25 Ostim Yenimahalle/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 46821

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği Soyut Cebir - Lineer Cebir 2. Kitap" adlı yayınıımız Soyut Cebir - Lineer Cebir bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB-AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı yayinevi@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi



Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEPTE, TABLETTE VE MASANDA

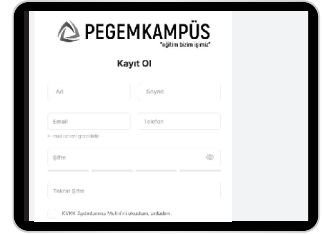


Detaylı anlatım için QR kodu okutunuz.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:

1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.

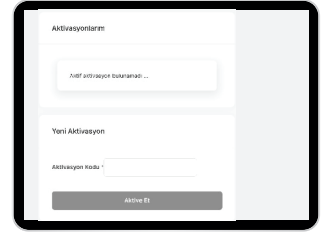


2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan **“Aktivasyonlarım”** sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



Yırtmayınız
Kazıyınız



3. Adım Ürünlerim

“Hibrit Kitap” sekmesinden kitabınızın konu anlatımına ve video derslere, **“Ölçme İstasyonu”** sekmesinden konu sonu testlerine erişim sağlayabilirsiniz.



Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2027 tarihine kadar geçerlidir.



Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

SOYUT CEBİR

Sayılar ve Özellikleri	1	Simetrik (Permütasyon) ve Alterne Gruplar	25
Rakam	1	Gruplarda Homomorfizm ve İzomorfizm	26
Sayma Sayıları	1	Homomorfizma	26
Doğal Sayılar	1	İzomorfizma	26
Tam Sayılar	1	Bölüm Grupları	29
Aralarında Asalılık	1	Devirli Gruplar	30
Rasyonel Sayılar	1	Devirli Grupların Alt Grupları	31
İrrasyonel Sayılar	1	Üreteç Sayısı	32
Reel Sayılar	1	Çarpım Grupları	32
Tek ve Çift Sayılar	1	İzomorf olmayan Abelyan Gruplar	33
Ardışık Sayılar	2	Halka, Cisim ve Tamlık Bölgesi	33
Negatif ve Pozitif Sayılar ile İlgili Özellikler	2	Alt Halka	35
Tam Sayılarda Bölünebilme	2	Sıfır Bölenler ve Tamlık Bölgesi	35
En Büyük Ortak Bölen	4	Bölüm Halkası	36
En Küçük Ortak Kat	4	İdeal	36
Euler ϕ -Fonksiyonu	7	Nilpotent Eleman	36
ϕ -Fonksiyonunun Bazı Özellikleri	7	Polinom Halkası	36
Kongrüanslar	9	Cisim	37
Tam Sayılar ve Modüler Aritmetik	9	Cebirsel Sayı	37
Gruplar	19	Transandant Sayı	37
Tek İşlemlili Cebirsel Yapı Türleri	19	Sayılabilir Küme	37
Mertebe	21	Çözümlü Test 1	43
Alt Gruplar	22	Çözümlü Test 2	47
Normal Alt Gruplar	24	Çözümlü Test 3	51
		Çözümlü Test 4	55

LİNEER CEBİR

Hatırlatma: İç İşlem.....	59
Dış İşlem.....	59
Grup.....	59
Alt Grup	59
Halka	59
Vektör Uzayları	60
Alt Vektör Uzayı	62
Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık	66
Taban (Baz).....	67
İç Çarpım Uzayları.....	68
İç Çarpım.....	68
Norm	70
Ortonormal Baz	75
Direkt Toplam Uzayı	80
İç Çarpım Uzaylarının Alt Uzayları.....	81
Lineer Dönüşümler	83
Matrisler ve Matris Uzayları	90
Matris Toplamı	91
Skaler ile Matris Çarpımı.....	92
Matris Çarpımı.....	92
Bir Matrisin Transpozu	93
Kare Matrisler.....	94
Bir Matrisin Tersİ.....	94
Elemanter Operasyonlar (Basit İşlemler).....	104
Determinantlar	105
Sarrus Kuralı	106
Minör ve Kofaktör	108

Alterne ve Çok Lineer Fonksiyonlar.....	115
n-Linear Fonksiyonlar.....	115
Bir Lineer Dönüşümün Determinantı ve İzi.....	116
Determinantlarda Alan ve Hacim Hesabı	116
Matrislerin Polinomu	117
Karakteristik Değerler ve Karakteristik	
Vektörler	118
Karakteristik Uzay	119
Karakteristik Polinom ve Karakteristik	
Denklem	120
Çözümlü Test 1	127
Çözümlü Test 2.....	132
Çözümlü Test 3.....	136
Çözümlü Test 4.....	140
Çözümlü Test 5.....	144

SOYUT CEBİR

1. Sayılar ve Özellikleri

Rakam

Sayıları yazmaya yarayan sembollere rakam denir. Kullandığımız onluk sistemdeki rakamların kümesi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dur.

Rakamlarla oluşturulan ifadelere sayı denir.

Sayma Sayıları

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ kümesi sayma sayılar kümesidir.

Doğal Sayılar

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesidir. $N^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ pozitif doğal sayılar kümesini ifade eder.

Tam Sayılar

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesidir.

Tam sayılar kümesi üç ana bölümden oluşur. Negatif tam sayılar (Z^-), pozitif tam sayılar (Z^+) ve $\{0\}$ kümesidir. Ayrıca $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$ dir.

Aralarında Asallık

p ve q sıfırdan farklı iki pozitif tam sayı olsun. p ve q sayılarını ortak olarak bölen en büyük pozitif tam sayı 1 ise p ve q aralarında asaldır denir.

Rasyonel Sayılar

$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \text{ ve } q \text{ aralarında asal, } q \neq 0 \right\}$ kümesidir.

İrrasyonel Sayılar

$I = Q'$ sembolleriyle gösterilir yukarıda tanımlanan $\frac{p}{q}$ tipinde yazılamayan sayılardan oluşur. Yani rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayı denir.

Reel Sayılar

Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşim kümesidir. R ile gösterilir. $R = Q \cup Q'$ dir.

Örnek

$x, y, z \in Z$ olmak üzere,

$$x \cdot y = 12, y \cdot z = 4 \text{ ve } x \cdot z = 3$$

eşitliklerini sağlayan x, y, z sayılarının en büyük toplamı en küçük toplamından kaç fazladır?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm

$$\frac{x \cdot y}{y \cdot z} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{x}{z} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot z \text{ bulunur.}$$

Bu ifade $x \cdot z = 3$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$3z^2 = 3 \Rightarrow z = \pm 1 \text{ bulunur.}$$

$$z = 1 \text{ için } x = 3 \text{ ve } y = 4 \text{ olup } x + y + z = 8$$

$$z = -1 \text{ için } x = -3 \text{ ve } y = -4 \text{ olup } x + y + z = -8 \text{ bulunur.}$$

$8 - (-8) = 16$ dir. Doğru seçenek C olarak elde edilir.

Örnek

$a, b, c \in N$ olmak üzere

$3a + 6b - c = 24$ eşitliğini sağlayan a, b ve c değerleri için $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm

Katsayısı büyük olana büyük değer verilir.

Sayılar aynı olabileceğinden $a = 0 = c$ seçilirse $b = 4$ bulunur.

$$a + b + c = 4 \text{ olur.}$$

Örnek

a ve b doğal sayılardır.

$$56 \cdot a = b^3$$

eşitliğini sağlayan en küçük b değeri kaçtır?

Çözüm

Önce sayı asal çarpanlarına ayrılır.

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

$$56 \cdot a = 2^3 \cdot 7 \cdot a = b^3 \text{ tür.}$$

Buradan $a = 7^2$ seçilirse $b = 2 \cdot 7 = 14$ bulunur.

Tek ve Çift Sayılar

2 ile kalansız bölünebilen tam sayılara çift tam sayı, 2 ile tam bölünemeyen tam sayılara tek tam sayı denir. Çift sayılar $2n$, tek tam sayılar $2n - 1$ ile gösterilir ($n \in Z$).

Tek ve Çift Tam Sayılar İle İlgili Özellikler

- | | |
|--|---|
| 1) $T \mp T = \emptyset$ | 5) $\emptyset \cdot \emptyset = \emptyset$ |
| 2) $\emptyset \mp \emptyset = \emptyset$ | 6) $T \cdot T = T$ |
| 3) $T \mp \emptyset = T$ | 7) $n \in N$ olmak üzere $T^n = T$ |
| 4) $T \cdot \emptyset = \emptyset$ | 8) $n \in N^+$ olmak üzere $\emptyset^n = \emptyset$ dir. |

Tek ve çift sayılarda bölme işlemine ait kural tanımlanamaz. Örneğin 60, 40 ve 2 sayıları çift sayıdır.

$$\frac{40}{2} = \emptyset, \frac{40}{40} = T, \frac{40}{60} \text{ sayısı ne tek ne de}$$

çifttir.

NOT !

Ardışık Sayılar

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n, n + 1, n + 2, \dots$ sayılarına ardışık tam sayılar denir.

Kural:

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \text{ dir.}$$

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2n - 1, 2n + 1, 2n + 3, \dots$ sayılarına ardışık tek sayılar denir.

Kural:

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 \text{ dir.}$$

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2n, 2n + 2, 2n + 4, \dots$ sayılarına ardışık çift sayılar denir.

Kural:

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1) \text{ dir.}$$

Kural:

Ardışık terimleri arasındaki artış miktarı eşit olan dizide

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$$

ve

$$\text{Terim Toplamı} = \frac{\text{Terim Sayısı} \cdot (\text{Son terim} + \text{İlk terim})}{2}$$

dir.

Negatif ve Pozitif Sayılar İle İlgili Özellikler

- | | |
|------------------------|--------------------|
| 1) $(-)\cdot(-) = (+)$ | 5) $(-)/(-) = (+)$ |
| 2) $(-)\cdot(+) = (-)$ | 6) $(-)/(+) = (-)$ |
| 3) $(+)\cdot(+) = (+)$ | 7) $(+)/(+) = (+)$ |
| 4) $(+)\cdot(-) = (-)$ | 8) $(+)/(-) = (-)$ |

9) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(-)^{2n} = (+)$ dir.

10) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(-)^{2n-1} = (-)$ dir.

11) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(+)^n = (+)$ dir.

Tam Sayılarda Bölünebilme

$m, n, r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m \cdot n = r$ olsun. Bu durumda m ve n ye r nin bölenleri (çarpanları) r ye de m ve n nin bir katı denir. m, r nin bir böleni ise bu durum $m \mid_r$ ile, aksi takdirde $m \nmid_r$ ile gösterilir.

2 ile bölünebilme: Çift tam sayılar 2 ile tam bölünür.

3 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları toplamı 3 veya 3 ün katı ise sayı 3 ile tam bölünür.

4 ile bölünebilme: Verilen sayının son iki basamağı (birler ve onlar basamağı) 4 ile tam bölünebiliyor ise verilen sayı 4 ile tam bölünür.

5 ile bölünebilme: Verilen sayının birler basamağı 0 veya 5 ise sayı 5 ile tam bölünür.

7 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları altına sağdan sola doğru sırasıyla 1, 2, 3 sayıları yazılır. Bu rakamlar altlarına yazdığımız sayılar ile çarpılır. Daha sonra sağdan sola üçerli gruplar hâlinde alınıp bu gruplar (+), (-) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 7 veya 7'nin katı ise verilen sayı 7 ile tam bölünür.

8 ile bölünebilme: Verilen sayının son üç basamağı (birler, onlar ve yüzler basamağı) 8 ile bölünebiliyor ise sayı 8'e tam bölünür.

9 ile bölünebilme: Verilen sayının rakamları toplamı 9 veya 9 un katı ise sayı 9 ile tam bölünür.

10 ile bölünebilme: Verilen sayının birler basamağı 0 ise verilen sayı 10 ile tam bölünür.

11 ile bölünebilme: Verilen sayı sağdan sola doğru sırası ile (+), (-) ile çarpılıp toplanır. Sonuç 11 veya 11 in katı ise verilen sayı 11 ile tam bölünür.

Örnek

Hangi n doğal sayıları için $(n+1) \mid_{(n^2+1)}$ dir.

Çözüm

$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(n+1) \mid_{(n^2-1)} \text{ dir.}$$

$$(n+1) \mid_{(n^2+1)} \text{ ve } (n+1) \mid_{(n^2-1)} \text{ olduğundan}$$

$$n+1 \mid_{[(n^2+1)-(n^2-1)]} \Rightarrow n+1 \mid_2 \text{ olur.}$$

$n \in \mathbb{N}$ olduğundan ve $n + 1 \leq 2$ olması gerektiğinden $n = 0, 1$ elde edilir.

Kural:

$[1, x]$ aralığında n ile bölünebilen doğal sayıların sayısı

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \text{ dir.}$$

Kural:

$a \in \mathbb{Z}$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$n < m \text{ için } a^{2^n+1} \mid_{a^{2^m-1}} \text{ dir.}$$

Kural:

$n \geq 2$ olmak üzere n ve k iki doğal sayı olsun.

$$n-1 \mid_{n^k-1} \text{ dir.}$$

Kural:

n bir doğal sayı ve k bir tek sayı olsun.

$$(1 + 2 + \dots + n) \mid (1^k + 2^k + \dots + n^k) \text{ dir.}$$

Kural:

$a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. a sayısı b ile bölündüğünde kalan r ise $2^a - 1$ sayısı $2^b - 1$ ile bölündüğünde kalan $2^r - 1$ dir.

Örnek

$\{1, 2, \dots, 600\}$ dizisinde 13 ile bölünebilen kaç tane doğal sayı vardır?

Çözüm

$$\left\lfloor \frac{600}{13} \right\rfloor = 46 \text{ adettir.}$$

Örnek

1000 den küçük kaç doğal sayı 17 ile bölünür?

Çözüm

$[1, 1000]$ kümesinde

$$\left\lfloor \frac{1000}{17} \right\rfloor = 58 \text{ ve } 0 \in \mathbb{N} \text{ için } 17 \mid 0 \text{ olup toplam } 58 + 1 = 59$$

adet sayı 17 ile tam bölünür.

Örnek

$N = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$ sayısının 41 ile bölünebilmesi için n en az kaç olmalıdır?

Çözüm

$$\begin{aligned} N &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) \\ &= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) \\ &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

sayısının 41 ile bölünebilmesi için $n(n+1)(n+2)$ çarpanlarından en az biri 41 e bölünmelidir.

$$n+2 = 41 \Rightarrow n = 39 \text{ olmalıdır.}$$

Teorem:

m, n ve r tam sayı olmak üzere,

- i) $\forall m \in \mathbb{Z}$ iken $a \mid 0$ dir.
- ii) $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $\pm 1 \mid m$ ve $\pm m \mid m$ dir.
- iii) $m \mid_{\pm 1} \Leftrightarrow m = \mp 1$ dir.
- iv) $m \mid_n$ ise $\pm m \mid_{\pm n}$ dir.
- v) $m \mid_n$ ve $n \mid_r$ ise $m \mid_r$ dir.
- vi) $m \mid_n$ ve $n \mid_m$ ise $m = \pm n$ dir.
- vii) $c \neq 0$ olmak üzere $cm \mid_{cn}$ ise $m \mid_n$ dir.
- viii) $m_1 \mid_{n_1}$ ve $m_2 \mid_{n_2}$ ise $m_1 \cdot m_2 \mid_{n_1 \cdot n_2}$ dir.
- ix) $m \mid_n$ ve $m \mid_r$ ise $m \mid_{n+r}$ dir.

Çıkış Sorular

$k \mid_m$ gösterimi k sayısının m sayısını tam bölündüğünü ifade eder.

Buna göre a, b ve c tam sayıları için,

- I. $c \mid a \cdot b$ ise $c \mid a$ ve $c \mid b$ dir.
- II. $a \cdot b \mid c$ ise $a \mid c$ ve $b \mid c$ dir.
- III. $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ dir.

yargılarından hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I
- B) I ve II
- C) I ve III
- D) II ve III
- E) Yalnız III

Çözüm

c sayısı $a \cdot b$ yi bölüyor ise $c \mid_a$ ve $c \mid_b$ doğru olmayabilir, $6 \mid_{2 \cdot 3}$ tür ama $6 \nmid_2$ ve $6 \nmid_3$ yanlıştır. II ve III. öncül doğrudur.

Cevap D

Tanım:

(Asal Sayı) : $n > 1$ tam sayısının kendisinden ve birden başka pozitif böleni yoksa n 'ye asal (= prime) sayı denir.

Tanım:

(Bileşik Sayı): Asal olmayan sayılara bileşik (= combined) sayı denir.

Tanım:

Aralarındaki fark iki olan asal sayılara ikiz asallar denir.

Teorem:

Her bileşik sayının en az bir asal çarpanı vardır.

Teorem (Euclid):

Asal sayıların sayısı sonsuzdur.

Bir sayının tüm bölenlerinin sayısı pozitif bölenlerinin sayısının iki katıdır.

Uyarı !

Teorem (Bölme Algoritması):

$m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \neq 0$ ise $m = q \cdot n + r$; $0 < r < |n|$ olacak şekilde bir tek q ve r tam sayı ikilisi vardır.

En Büyük Ortak Bölen:

m ve n tam sayılar olmak üzere $k|m$ ve $k|n$ ise k ye m ve n nin bir ortak böleni denir.

m ve n yi bölen en büyük pozitif d tam sayısına m ve n nin en büyük ortak böleni (=obeb = ebob) denir.

$d = (m, n)$ ile gösterilir.

Uyarı

1) Tanıma göre d 'nin m ve n 'nin obeb'i olması için gerek ve yeter şart

i) $d|m$ ve $d|n$ olması,

ii) $k, k|m$ ve $k|n$ özelliğindeki bir başka ortak bölen iken $k|d$ olmasıdır.

2) İkinden fazla sayının obeb'i de benzer şekilde tanımlanır.

Uyarı

Obob verilen tam sayıların pozitif lineer toplamalarının en küçüğüdür.

Teorem:

Sıfırdan farklı iki tam sayının obeb'i tektir.

Teorem: $(m, n) = d \Leftrightarrow \left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ 'dir.

Teorem:

$(a, b) = 1$ ve $(a, c) = 1$ ise $(a, b, c) = 1$ 'dir.

Teorem:

$\frac{a}{b} \cdot c$ ve $(a, b) = 1$ ise $\frac{a}{c}$ dir.

En Küçük Ortak Kat:

a, b sıfırdan farklı tam sayılar olsun.

a) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a|k$ ve $b|k$ ise k 'ye a ve b 'nin bir ortak katı denir.

b) k, a ve b 'nin bir ortak katı olsun. Eğer $t; a$ ile b 'nin bir başka ortak katı iken $k|t$ ise k 'ye a ile b 'nin en küçük ortak katı (ekok) denir ve $[a, b] = k$ ile gösterilir.

Teorem:

$a, b \neq 0$ iki tam sayı ise $(a, b) \cdot [a, b] = |a \cdot b|$ dir.

Örnek

$x \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p = x^2 - 1$ olacak şekildeki tüm p asal sayılarını bulunuz.

Çözüm

$P = (x - 1)(x + 1)$ sayısının çarpanları

$\begin{matrix} 1 \cdot p \\ p \cdot 1 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} P \text{ asal olduğundan çarpanı } 1 \text{ ve kendisidir.} \end{array} \right.$

$(-1) \cdot (-p)$

$(-p) \cdot (-1)$ tipindedir.

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, p = 3$ asaldır.

$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0, p = -1$ asal değil.

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, p = -1$ asal değil

$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2, x = -2 \notin \mathbb{N}$

Çözüm kümesi $p = \{3\}$ tür.

Örnek

$x \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p = x^3 - 1$ şeklindeki tüm p asallarını bulunuz.

Çözüm

$P = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ sayısının çarpanları

$p \cdot 1$

$1 \cdot p$

$(-1) \cdot (-p)$

$(-p) \cdot (-1)$ tipindedir.

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2, p = 2^3 - 1 = 7$ asaldır.

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0, p = -1$ asal değildir.

$x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = -1$

$p = -1$ asal değil $p = -2$ asal değil

$x^2 + x + 1 = -1 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2} \notin \mathbb{N}$

Çözüm kümesi $x = \{7\}$ dir.

Örnek

$(a, 4) = 2$ ve $(b, 4) = 2$ iken $(a + b, 4)$ nedir?

2027

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
AKADEMİ GİRİŞ SINAVI

VIDEO DERS
HEDİYELİ

MEB-AGS ÖABT

LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

GEOMETRİ – İSTATİSTİK VE OLASILIK

KONU ANLATIMLI



ÖABT KONU
DAĞILIMINA
UYGUN



SINAV SORU
TİPLERİNE
YÖNELİK



KAVRAMSAL
ANLATIM

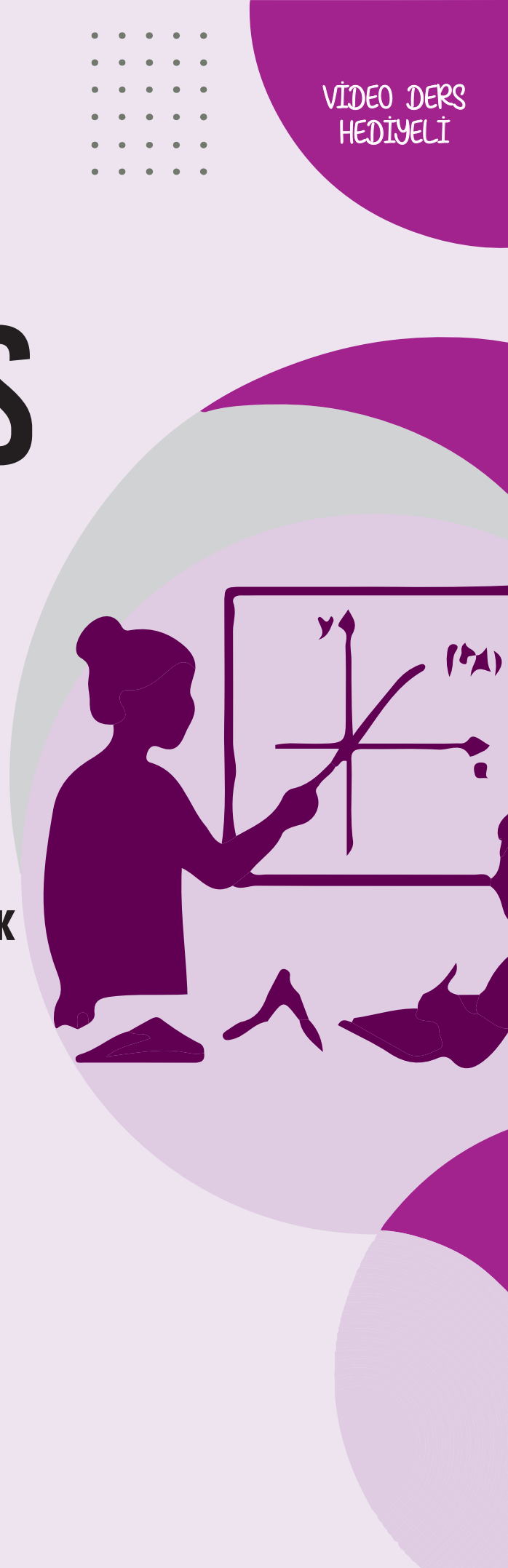


Video derslere ve kitabın
baskı tarihinden sonraki
güncellemelere erişebilmek için
QR kodu okutunuz.



PEGEM

AKADEMİ





Komisyon
MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Geometri - İstatistik ve Olasılık
Konu Anlatımlı

ISBN 978-625-8844-70-2

Kitapta yer alan bölümlerin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© Pegem Akademi

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

3. Baskı: 2026, Ankara

Proje-Yayın: Pegem

Dizgi-Grafik Tasarım: Arzu Orhan Kaya

Kapak Tasarımı: Pegem

İletişim

Pegem Akademi: Shira Ticaret Merkezi, Macun Mahallesi 204 Cad.

No: 141/33, Yenimahalle/Ankara

Yayınevi: 0312 430 67 50

Dağıtım: 0312 434 54 24

Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60

İnternet: www.pegem.net

E-ileti: yayinevi@pegem.net

WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

Baskı: Ankara Özgür Matbaacılık

1250. Cad. No: 25 Ostim Yenimahalle/Ankara

Yayıncı Sertifika No: 51818

Matbaa Sertifika No: 46821

ÖN SÖZ

Değerli Okuyucularımız,

MEB-AGS ÖABT LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ konu anlatımlı setimiz üç kitap hâlinde düzenlenmiştir. "Lise Matematik Öğretmenliği Geometri-İstatistik ve Olasılık 3. Kitap" adlı yayıнымız Geometri - İstatistik ve Olasılık bölümünü kapsamaktadır ve MEB-AGS ÖABT Lise Matematik Öğretmenliği Alan Bilgisi Testi kapsamındaki soruları çözmek için gerekli bilgi, beceri ve teknikleri edinme ve geliştirme sürecinde siz değerli öğretmen adaylarımıza kılavuz olarak hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanış sürecinde, sınav kapsamındaki temel alanlarda kapsamlı alanyazın taraması yapılmış, bu kitabın gerek MEB-AGS ÖABT'de gerekse gelecekteki meslek hayatınızda ihtiyacınızı maksimum derecede karşılayacak bir başucu kitabı niteliğinde olması hedeflenmiştir.

Detaylı, güncel ve anlaşılır bir dilde yazılan konu anlatımları, çıkmış sorular ve detaylı açıklamalarıyla desteklenmiş, her ünite içeriği ÖSYM formatına uygun, çözümlü test sorularıyla pekiştirilmiştir. Ayrıca konu anlatımlarında verilen bilgi ve çözüm tekniklerine ek olarak uyarı kutucuklarıyla da önemli konulara dikkat çekilmiştir.

Yoğun bir araştırma ve çalışma sürecinde hazırlanmış olan bu kitaba ilişkin sorularınızı yayinevi@pegem.net adresine e-posta yoluyla ya da 0538 594 92 40 numarasına WhatsApp üzerinden iletmeniz yeterli olacaktır. Sorunuz en kısa sürede ekibimiz tarafından cevaplandırılacaktır.

Geleceğimizi güvenle emanet ettiğimiz siz değerli öğretmenlerimizin hizmet öncesi ve hizmet içi eğitimlerine katkıda bulunabilmek ümidiyle...

Başarılar...

Pegem Akademi



Kitabın içeriği, MEB'in yapacağı program değişikliği veya buna bağlı olarak ÖSYM'nin sınav içeriğinde yapacağı değişiklik durumunda, kitabın dijital hâlinde (aktivasyon geçerlilik süresince) güncellenerek siz değerli adaylara sunulur.

TÜM KİTAPLAR YANINDA; CEpte, TABLETte VE MASANDa

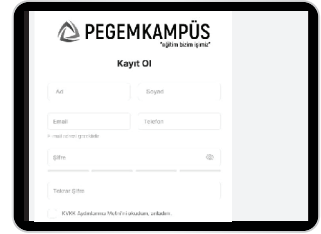


Detaylı anlatım için QR kodu okutunuz.

Pegem Kampüs web sitesi üzerinden aktivasyon kodunuzu aktif edebilmek ve içeriklere erişebilmek için aşağıdaki adımları takip ediniz:

1. Adım Üyelik

Mevcut tarayıcınızın adres çubuğuna **arti.pegemkampus.com** yazarak web sitemiz üzerinden üyeliğinizi gerçekleştirebilirsiniz.

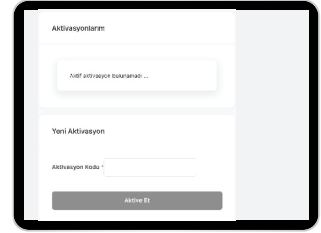


2. Adım Aktivasyon

Üyelik bilgileriniz ile giriş yaptıktan sonra sol menüde yer alan **“Aktivasyonlarım”** sekmesine girerek kodunuzu aktif edebilirsiniz.



Yırtmayınız
Kazıyınız



3. Adım Ürünlerim

“Hibrit Kitap” sekmesinden kitabınızın konu anlatımına ve video derslere, **“Ölçme İstasyonu”** sekmesinden konu sonu testlerine erişim sağlayabilirsiniz.



Aktivasyon kodu kitabınızın iç kapağında yer almaktadır. Aktivasyon kodu ile aktif ettiğiniz hibrit kitaba erişim 31.08.2027 tarihine kadar geçerlidir.



Pegem Kampüs İletişim Hattı
0312 418 51 55

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

UZAYDA VEKTÖRLER

UZAYDA VEKTÖRLER.....	1
İki Vektörün Paralellliği	2
Vektörlerin Lineer Bileşimi	2
Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık	2
Standart Birim Vektörleri.....	2
Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı	2
İki Vektör Arasındaki Açık	3
Dik İzdüşüm Vektörü.....	3
Vektörel (Çapraz) Çarpım.....	4
Paralelkenarın Alanı	5
Paralelyüzün Hacmi.....	6
Çözümlü Test.....	9
Çözümler	11

UZAYDA DOĞRU ve DÜZLEM DENKLEMİ

UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEM DENKLEMİ	13
İki Noktası Belli Olan Doğru Denklemi.....	13
Düzlem	14
Çözümlü Sorular - I.....	16
Bir Noktanın Düzleme Uzaklığı.....	19
Çözümlü Sorular - II.....	19
Uzayda İki Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları ve Kesişme Noktasının Bulunması.....	22
Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı	23
Aykırı İki Doğru Arasındaki En Kısa Uzaklık ve Ortak Dikme ve Dikme Ayaklarının Bulunması.....	24
Çözümlü Sorular.....	24
İki Düzlemin Birbirlerine Göre Konumu ve İki Düzlem Arasındaki Açık.....	28
Bir Düzlem ile Bir Doğru Arasındaki Açık	28
İki Düzlemin Açıortay Düzlemi.....	28
Çözümlü Sorular.....	28
Bir Doğrudan Geçen Düzlem Demeti	30
Uzayda Simetri	31
Çözümlü Sorular.....	32
Çözümlü Test - 1.....	37
Çözümler	39

Çözümlü Test - 2.....	41
Çözümler	43

YÜZEYLER

E^3 DE YÜZEY	46
KÜRE.....	46
Küre Olma Koşulları	47
Kürenin Parametrik Denklemi.....	48
Kürenin Teğet Düzlemi	48
SİLİNDİR	48
KONİ.....	50
Bazı Kuadratik Yüzeyler	54
Çözümlü Sorular.....	54
Silindirin İsimlendirilmesi	55
Dönel Yüzeyler	57
SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR.....	59
KÜRESEL KOORDİNATLAR.....	59
Çözümlü Test.....	60
Çözümler	62

KONİKLER

TANIM.....	64
Genel Konik Denkleminde x.y- li Terimi Yok Etme	64

ELİPS - HİPERBOL - PARABOL

ELİPS	66
Elipsin Denklemi	66
Elipsin Teğet ve Normal Denklemleri.....	67
Elipsin Parametrik Denklemi.....	68
HİPERBOL	70
Hiperbolün Denklemi	70
PARABOL.....	73
Parabolün Denklemi	73
Çözümlü Test.....	82
Çözümler	84
Karma Test - 1	86
Çözümler	88
Karma Test - 2	90
Çözümler	92

2. BÖLÜM

İSTATİSTİK VE OLASILIK

TEMEL KAVRAMLAR.....	94
Sayısal Bilgi, Veri, Ölçüm	94
Değişken ve Türleri.....	94
Fonksiyon	94
Evren ve Örneklem.....	96
İstatistik ve Parametre	96
Çözümlü Test.....	97
Çözümler	99

VERİNİN DÜZENLENMESİ VE MERKEZE EĞİLME ÖLÇÜLERİ

VERİNİN DÜZENLENMESİ.....	100
Grafik Çizme.....	100
Merkeze Eğilme (Yığılma) Ölçüleri.....	101
Mod (Tepe Değer).....	101
Medyan (Ortanca).....	101
Aritmetik Ortalama.....	102
Mod, Medyan ve Ortalamanın Karşılaştırılması	103
Ağırlıklı Ortalama.....	104
DEĞİŞME (DAĞILMA) ÖLÇÜLERİ	105
Ranj (Açıklık)	105
Mutlak Kayma.....	105
Varyans ve Standart Kayma	105
Bağıl Değişkenlik Katsayısı	107
STANDARTLAŞTIRMA (z ve T PUANLARI).....	107
z Puanı	107
T Puanı	107
Çözümlü Test.....	109
Çözümler	112

OLASILIK

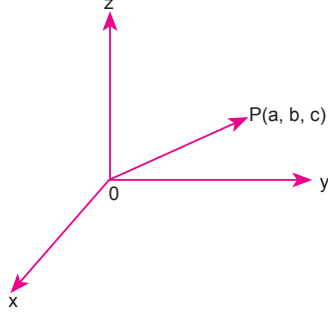
TEMEL KAVRAMLAR.....	114
Olasılık.....	115
Birleşik Olayların Olasılığı	116
Ayrık İki Olayın Birleşiminin Olasılığı.....	116
Olaylar Arasındaki Bağlılıklar	117
Şartlı Olaylar ve Olasılıklar	117
Bağımsız Olaylar	118
Çözümlü Sorular.....	119
TESADÜFİ DEĞİŞKEN, OLASILIK FONKSİYONU VE BEKLENEN DEĞER.....	121
Tesadüfi Değişkenin Beklenen Değeri.....	127
Varyans Hesabı	130
Momentler.....	133
Moment Çıkaran Fonksiyon.....	133
Birleşik Olasılık Dağılımı.....	135
Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu.....	135
Marjinal Olasılık Fonksiyonları.....	136
Kovaryans ve Korelasyon.....	138
Çözümlü Test.....	145
Çözümler	148

OLASILIK DAĞILIMLARI

OLASILIK.....	150
Binom Olasılık Dağılımı	150
Poisson Olasılık Dağılımı	152
Hipergeometrik Olasılık Dağılımı	153
Normal Olasılık Dağılımı.....	160
Standart Normal Olasılık Dağılımı	161
Çözümlü Test.....	163
Çözümler	166
Çözümlü Deneme - 1	168
Çözümler	171
Çözümlü Deneme - 2.....	174
Çözümler	177

UZAYDA VEKTÖRLER

$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ kümesine 3 boyutlu vektör uzayı denir. Vektörlerin başlangıç noktası orijin olmak üzere, R^3 ün her noktasına bir vektör karşılık gelir.



$\vec{OP} = (a, b, c)$ ise a, b, c sayılarına $\vec{OP}$ yer vektörünün bileşenleri denir. P noktasının orijine olan uzaklığına, $\vec{OP}$ vektörünün normu (uzunluğu) denir ve $|\vec{OP}|$ ile gösterilir.

$$\vec{OP} = (a, b, c) \Rightarrow |\vec{OP}| = |\vec{P}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ dir.}$$

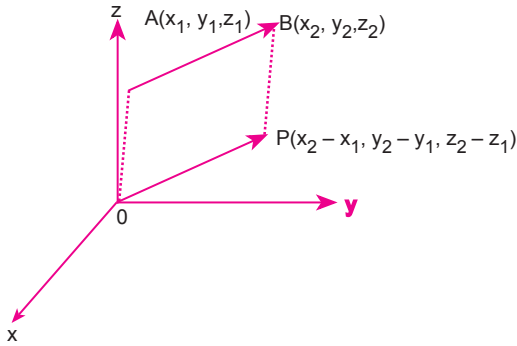
$\vec{AB}$ vektörüne eş, başlangıç noktası orijin olan $\vec{OP}$ vektörüne, $\vec{AB}$ vektörünün yer vektörü denir.

$A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ ise;

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|\vec{OP}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Normu 1 olan vektöre birim vektör denir.



Çıkış Sorular

Uzayda $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, -4)$ ve $C(m, 2, -1)$ noktaları veriliyor.

$\vec{AB} \perp \vec{AC}$ olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -27 B) -29 C) 14 D) 29 E) 27

Çözüm

$$\vec{AB} = (1, -3, -7) \quad \vec{AC} = (m - 1, 0, -4)$$

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ dir.}$$

$$1(m - 1) + (-3) \cdot 0 + (-7)(-4) = 0$$

$$m + 27 = 0$$

$$m = -27 \text{ olur.}$$

Cevap A

Örnek

$A(1, -1, 1)$ ve $B(2, a, -3)$ noktaları veriliyor.

$|\vec{AB}| = \sqrt{26}$ br olduğuna göre a sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm

$$\vec{AB} = (1, a + 1, -4)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{26} \Rightarrow \sqrt{1^2 + (a + 1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 + 17 = 26$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow |a + 1| = 3 \Rightarrow a = 2 \text{ veya } a = -4$$

Çıkış Sorular

Dik koordinat düzleminde verilen $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri için $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 16$ olduğuna göre, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ değeri kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

Çözüm

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$\frac{(\|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\|) \cdot (\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\|)}{16} = 4 \cdot 8$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\| = 2$$

$$+ \|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 16$$

$$2 \cdot \|\vec{u} + \vec{v}\| = 18 \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = 9 \text{ olur.}$$

Cevap B

İki Vektörün Paralelliliği

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $k \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ olmak üzere,

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b} \text{ dir.}$$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \text{ dir.}$$

Örnek

A(2, 4, 2) ve B(6, 2, 4) noktaları ile

$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$ vektörü veriliyor.

$\vec{AB} // \vec{v}$ olduğuna göre, (x, y) ikilisini bulunuz.

Çözüm

$$\vec{AB} = (4, -2, 2)$$

$$\vec{v} = (x - y, x + 2y, 1)$$

$$\vec{AB} // \vec{v} \Rightarrow \frac{x - y}{4} = \frac{x + 2y}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) = (1, -1) \text{ olur.}$$

Vektörlerin Lineer Bileşimi

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n \in \mathbb{R}^3$ ve $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{R}$

olmak üzere,

$\vec{u} = k_1 \cdot \vec{V}_1 + k_2 \cdot \vec{V}_2 + k_3 \cdot \vec{V}_3 + \dots + k_n \cdot \vec{V}_n$ vektörüne,

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ vektörlerinin lineer bileşimi denir.

Lineer Bağımlılık – Lineer Bağımsızlık

$\mathbb{R}^3$ de $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ vektörleri verilsin.

$c_1 \cdot \vec{V}_1 + c_2 \cdot \vec{V}_2 + c_3 \cdot \vec{V}_3 + \dots + c_n \cdot \vec{V}_n = \vec{0}$ denklemi yalnız

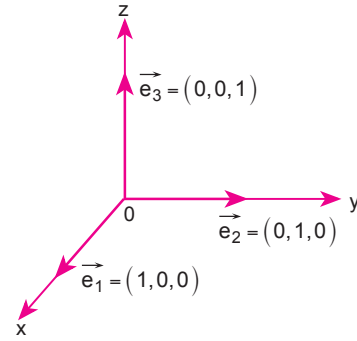
$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ için sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımsız; $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ değerlerinden en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde sağlanırsa bu vektörlere lineer bağımlı denir.

$V = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\}$, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olmak üzere $\det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n) = A$ olsun.

I. $A = 0 \Leftrightarrow V$ kümesi lineer bağımlı,

II. $A \neq 0 \Leftrightarrow V$ kümesi lineer bağımsızdır denir.

Uyarı!

Standart Birim Vektörleri

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayında üzerinde bulunduğu eksen ile pozitif yönlü birim vektörlere, standart birim vektörler denir.

$$\vec{e}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_3 = \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Vektörlerin İç (Skaler) Çarpımı

Her $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ için;

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

şeklinde tanımlanan işleme, " $\mathbb{R}^3$ de Öklid iç çarpım işlemi" denir.

Özellikleri

1. $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$, $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$
2. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ (değişme özelliği)
3. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ (çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)

1.BÖLÜM

Örnek

$\vec{A} = (3, a, -2)$ ve $\vec{B} = (a, 2, 10)$ vektörleri veriliyor.
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 5$ olduğuna göre a sayısının kaç olacağını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= 5 \\ 3a + 2a - 2 \cdot 10 &= 5 \\ 5a &= 25 \\ a &= 5\end{aligned}$$

İki Vektör Arasındaki Açı

$\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ verilsin. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü α olmak üzere,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha \text{ olur.}$$

$\vec{A} \perp \vec{B}$ ise $\alpha = 90^\circ$ için $\cos \alpha = 0$ olduğundan
 $\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ olur.

Örnek

$\vec{A} = (-1, 2, 3)$ ve $\vec{B} = (1, -1, 2)$ vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta \\ -1 - 2 + 6 &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}\end{aligned}$$

Örnek

$\vec{A} = (1, 1, 2)$ ve $\vec{B} = (\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, 4)$ vektörleri arasındaki açının cosinüsünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 + 8 = 6 \\ |\vec{A}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{B}| &= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (-\sqrt{3} - 1)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} + 16} \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \\ \cos \theta &= \frac{6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} \text{ olur.} \\ \cos \theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Örnek

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü 45° ,

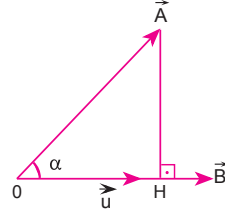
$|\vec{A}| = 2\sqrt{2}$ ve $|\vec{B}| = 3$ olduğuna göre,

$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (3\vec{A} - 2\vec{B})$ iç çarpımının sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (3\vec{A} - 2\vec{B}) &= 3 \cdot \vec{A} \cdot \vec{A} + 3 \cdot \vec{A} \cdot \vec{B} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} - 2 \cdot \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= 3 \cdot |\vec{A}|^2 + \vec{A} \cdot \vec{B} - 2 \cdot |\vec{B}|^2 \\ &= 3 \cdot 8 + 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ - 2 \cdot 9 \\ &= 24 + 6 - 18 \\ &= 12 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Dik İzdüşüm Vektörü



$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1), \vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri verilsin.

$\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü

$\vec{OH} = \vec{u}$ olsun. $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açı α olmak üzere;

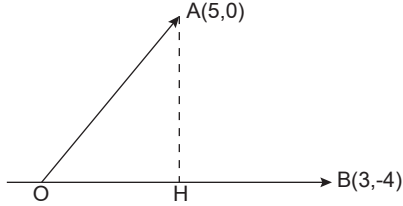
$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \text{ dir. } \cos \alpha = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{A}|} \text{ yazılırsa} \\ \frac{|\vec{u}|}{|\vec{A}|} &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \Rightarrow |\vec{u}| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \text{ dik izdüşüm vektörü-} \\ &\text{nün uzunluğudur.} \\ \vec{u} &= |\vec{u}| \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \text{ olacağından} \\ \vec{u} &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \cdot \vec{B} \text{ dik izdüşüm vektörünü verir.}\end{aligned}$$

Çıkış Sorular

Düzlemde $A(5, 0)$ vektörünün $B(3, -4)$ vektörü üzerine dik izdüşüm vektörünün uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm



$$\begin{aligned}\|OH\| &= \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{B}\|} \\ \|OH\| &= \frac{5 \cdot 3 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \\ \|OH\| &= 3 \text{ br bulunur.}\end{aligned}$$

Cevap C

Örnek

$\vec{A} = (1, 4, 2)$ ve $\vec{B} = (-2, 1, 3)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A}$ nın $\vec{B}$ üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğunun ve dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-2 + 4 + 6}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

Dik izdüşüm vektörü;

$$\vec{u} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \cdot \vec{B} = \frac{8}{14} \cdot (-2, 1, 3) = \frac{4}{7}(-2, 1, 3) \text{ olur.}$$

Vektörel (Çapraz) Çarpım

R^3 te $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri verilsin.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin vektörel çarpımı bir $\vec{C}$ vektörünü verir.

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ şeklinde gösterilir.

α : $\vec{A}$ vektörü ile $\vec{B}$ vektörü arasındaki açı

$\vec{P}$; $\vec{A}$ vektörü ile $\vec{B}$ vektörünün yönünü gösteren birim vektör olmak üzere;

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nin vektörel çarpımı :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{P} \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \alpha \text{ dir.}$$

Elde edilen $\vec{C}$ vektörü, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin ait olduğu düzleme dik olan bir vektördür.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri, vektörel çarpımı verir.

Örnek

$\vec{A} = (3, 1, 0)$ ve $\vec{B} = (0, 1, 2)$ olduğuna göre,

$\|\vec{A} \times \vec{B}\|$ kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} \\ &= (2, -6, 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{A} \times \vec{B}\| &= \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{4 + 36 + 9} \\ &= 7 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Özellikleri:

$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in R^3$ ve $k \in R$ olmak üzere;

I. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

II. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

III. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

IV. $(k \cdot \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k \cdot \vec{B}) = k \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$, $k \in R$

V. $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \theta$ (θ : $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açıdır.)

VI. $\begin{cases} \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \rangle = 0 \\ \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{B} \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{A} \times \vec{B} \text{ ve } \vec{B} \perp \vec{A} \times \vec{B} \text{ dir.}$